This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

4 Vol. 2 2 1

Tome - 1

achté des facultés
Reçu à Cayenne.
G. L.

1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

QA
37
B56

COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

TOME PREMIER.

COURS
DE
MATHÉMATIQUES,
À L'USAGE
DU
CORPS ROYAL DE L'ARTILLERIE.

TOME PREMIER,

Contenant l'ARITHMÉTIQUE, la GÉOMÉTRIE & la TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

Par M. Étienne BÉZOUT, de l'Académie royale des Sciences & de celle de Marine, Examinateur des Élèves & des Aſpirans du Corps royal de l'Artillerie, des Gardes du Pavillon & de la Marine, & des Aſpirans-Gardes de la Marine; Cenſeur royal.

Guignard
au Collège d'Harcourt

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE PH.-D. PIERRES,
Premier Imprimeur Ordinaire du Roi, rue S. Jacques.

M. DCC. LXXXVIII.

Hist. & Sciences
Mathématiques
10-5-39
17283
41.

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

NOTIONS préliminaires ſur la nature & les différentes eſpèces de Nombres.

1. ON appelle, en général, *quantité*, tout ce qui eſt ſuſceptible d'augmentation ou de diminution. L'étendue, la durée, le poids, &c. ſont des quantités. Tout ce qui eſt quantité, eſt de l'objet des Mathématiques; mais l'Arithmétique, qui fait partie de ces Sciences, ne conſidère les quantités, qu'en tant qu'elles ſont exprimées en nombres.

(10-5-39 N.4c

2. L'Arithmétique eſt donc la ſcience des nombres: elle en conſidère la nature & les propriétés; & ſon but eſt de donner des moyens faciles tant pour repréſenter les nombres, que pour les compoſer & décompoſer, ce qu'on appelle *calculer*.

3. Pour ſe former une idée exacte des nombres, il faut d'abord ſavoir ce qu'on entend par *unité*.

4. L'unité eſt une quantité que l'on prend (le plus ſouvent arbitrairement) pour ſervir de terme de comparaiſon à toutes les quantités d'une même eſpece.

Ainſi, lorſqu'on dit, un tel corps pèſe cinq livres; la livre eſt l'unité; c'eſt la quantité, à laquelle on compare le poids de ce corps; on auroit pu, également, prendre l'once pour unité, & alors le poids de ce corps eût été marqué par quatre-vingt.

5. Le nombre exprime de combien d'unités, ou de parties d'unité, une quantité eſt compoſée.

Si la quantité eſt compoſée d'unités entières, le nombre qui l'exprime s'appelle *nombre entier*: & ſi elle eſt compoſée d'unites entières, & de parties de l'unité, ou ſimplement de parties de l'unité, alors le nombre eſt dit *fractionnaire* ou *fraction*: *trois & demi* ſont un nombre fractionnaire: *trois quarts* forment une fraction.

6. Un nombre qu'on énonce ſans déſigner l'eſpece des unités, comme quand on dit ſimplement *trois* ou *trois fois*, *quatre* ou *quatre fois*, s'appelle un *nombre abſtrait*; & lorſqu'on énonce en même temps l'eſpèce des unités, comme quand on dit *quatre livres*, *cent boulets*, on l'appelle *nombre concret*.

Nous définirons les autres eſpèces de nombres, à meſure qu'il en ſera queſtion.

De la Numération & des Décimales.

7. La *numération* eſt l'art d'exprimer tous les nombres, par une quantité limitée de noms & de caractères. Ces caractères s'appellent *chiffres*.

8. Les caractères dont on fait uſage dans la numération actuelle, & les noms des nombres qu'ils repréſentent, ſont tels qu'on les voit ici:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
zéro, un, deux, trois, quatre, cinq, ſix, ſept, huit, neuf.

Pour exprimer tous les autres nombres, avec ces caractères, on eſt convenu que de dix unités, on en feroit une ſeule, à laquelle on donneroit le nom de *dixaine*, & que l'on compteroit par dixaines comme on compte par unités, c'eſt-à-dire, que l'on compteroit *deux dixaines*, *trois dixaines*, &c. juſqu'à 9 dixaines : que, pour repréſenter ces nouvelles unités, on emploieroit les mêmes chiffres que pour les unités ſimples, mais qu'on les diſtingueroit de celles-ci, par la place qu'on leur feroit occuper, en les mettant à la gauche des unités ſimples.

Ainſi, pour repréſenter *cinquante-quatre*, qui renferment cinq dixaines & quatre unités, on eſt convenu d'écrire 54. Pour repréſenter *ſoixante*, qui contiennent un nombre exact de dixaines & point d'unités, on écrit 60, en mettant un zéro, qui, tout à la fois, marque qu'il n'y a point d'unités ſimples, & que le nombre 6 eſt un nombre de dixaines.

On peut, par ce moyen, compter juſqu'à quatre-vingt-dix-neuf inclusivement.

9. Remarquons, en paſſant, cette propriété de la numération actuelle, ſavoir, qu'un chiffre placé à la gauche d'un autre, ou ſuivi d'un zéro, repréſente un nombre dix fois plus grand que s'il étoit ſeul.

10. Depuis 99, on peut compter juſqu'à neuf cents quatre-vingt-dix-neuf, par une convention ſemblable. De dix dixaines, on compoſera une ſeule unité qu'on nommera *Centaine*, parce que dix fois dix font cent ; on comptera ces centaines, depuis un juſqu'à neuf, & on les repréſentera par les mêmes chiffres, mais en plaçant ces chiffres à la gauche des dixaines.

Ainſi, pour marquer *huit cents cinquante-neuf*, qui con-

tiennent huit centaines, cinq dixaines & neuf unités, on écrira 859. Si on avoit *huit cents neuf*, qui contiennent huit centaines, point de dixaines & neuf unités, on écriroit 809; c'eſt-à-dire, que l'on mettroit un zéro, pour tenir la place des dixaines qui manquent. Si les unités manquoient auſſi, on mettroit deux zéros; ainſi pour marquer *huit cents*, on écriroit 800.

11. Remarquons encore, qu'en vertu de cette convention, un chiffre ſuivi de deux autres, ou de deux zéros, marque un nombre cent fois plus grand que s'il étoit ſeul.

12. Depuis neuf cents quatre-vingt-dix-neuf, on peut compter, par le même artifice, juſqu'à neuf mille neuf cents quatre-vingt-dix-neuf; en formant de dix centaines, une unité qu'on appelle *mille*, parce que dix fois cent font mille; comptant ces unités comme ci-devant, & les repréſentant par les mêmes chiffres placés à la gauche des centaines.

Ainſi, pour marquer *ſept mille huit cents cinquante-neuf*, on écrira 7859; pour marquer *ſept mille neuf*, on écrira 7009; & pour *ſept mille*, on écrira 7000; où l'on voit qu'un chiffre, ſuivi de trois autres ou de trois zéros, marque un nombre mille fois plus grand que s'il étoit ſeul.

13. En continuant, ainſi, de renfermer dix unités d'un certain ordre, dans une ſeule unité, & de placer ces nouvelles unités dans des rangs de plus en plus avancés, vers la gauche, on parvient à exprimer d'une maniere uniforme & avec dix caractères ſeulement, tous les nombres entiers imaginables.

14. Pour énoncer facilement un nombre exprimé par tant de chiffres qu'on voudra, on le partagera, par la penſée, en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche: on donnera à chaque tranche les noms ſuivans, en partant de la droite; *unités, milles, millions, billions, trillions, quatrillions*,

quintillions, *ſextillions*, &c. Le premier chiffre de chaque tranche (en partant toujours de la droite) aura le nom de la tranche; le ſecond, celui de dixaines; & le troiſieme, celui de centaines; alors en partant de la gauche, on énoncera chaque tranche, comme ſi elle étoit ſeule, & on prononcera, à la fin de chacune, le nom de cette même tranche.

Par exemple, pour énoncer le nombre ſuivant :

quatrillions, trillions, billions, millions, milles, unités.

23, 456, 789, 234, 565, 456.

On dira vingt-trois *quatrillions*, quatre cents cinquante-ſix *trillions*, ſept cents quatre-vingt-neuf *billions*, deux cents trente-quatre *millions*, cinq cents ſoixante-cinq *mille*, quatre cents cinquante-ſix *unités*.

15. De la numération que nous venons d'expoſer, & qui eſt purement de convention, il réſulte qu'à meſure qu'on avance de droite à gauche, les unités dont chaque nombre eſt compoſé, ſont de dix en dix fois plus grandes, & que par conſéquent pour rendre un nombre dix fois, cent fois, mille fois plus grand, il ſuffit de mettre à la ſuite du chiffre de ſes unités, un, deux, trois, &c. zéros : au contraire, à meſure qu'on rétrograde de gauche à droite, les unités ſont de dix en dix fois plus petites.

16. Telle eſt la numération actuelle : elle eſt la baſe de toutes les autres manières de compter, quoique dans pluſieurs Arts on ne s'aſſujettiſſe pas toujours uniquement à compter par dixaines, par dixaines de dixaines, &c.

17. Pour évaluer les quantités plus petites que l'unité qu'on a choiſie, on partage celle-ci en d'autres unités plus petites. Le nombre en eſt indifférent en lui-même; il ſuffit qu'il puiſſe meſurer les quantités qu'on a deſſein de meſurer; mais ce qu'on doit

avoir principalement en vue, dans ces ſortes de diviſions, c'eſt de rendre les calculs le plus commodes qu'il ſera poſſible; c'eſt pour cette raiſon, qu'au lieu de partager d'abord l'unité en un grand nombre de parties, afin de pouvoir évaluer les plus petites, on ne la partage, d'abord, qu'en un certain nombre de parties, & qu'on ſubdiviſe celles-ci, en d'autres, & ces nouvelles, encore en d'autres plus petites. C'eſt ainſi que, dans les monnoies, on partage la livre en 20 parties qu'on appelle *ſous*, le ſou en 12 parties qu'on appelle *deniers*. De même dans les meſures de poids, on partage la livre en 2 *marcs*, le marc en 8 *onces*, l'once en 8 *gros*, &c. enſorte que dans le premier cas, on compte par vingtaines & par douzaines; dans le ſecond, par deuxaines & par huitaines, &c.

18. Un nombre qui eſt compoſé de parties rapportées, ainſi, à différentes unités, eſt ce qu'on appelle un nombre *complexe*; & par oppoſition, celui qui ne renferme qu'une ſeule eſpece d'unités, s'appelle *nombre incomplexe*. $8^{liv.}$ ou 8 livres ſont un nombre incomplexe. $8^{liv.}\,17^{s}\,8^{d}$ ou 8 livres 17 ſous 8 deniers, ſont un nombre complexe.

19. Chaque Art ſubdiviſe, à ſa maniere, l'unité principale qu'il s'eſt choiſie. Les ſubdiviſions de la toiſe ſont différentes de celles de la livre; celles de la livre différentes de celles du jour, de l'heure; celles-ci différentes de celles du marc, & ainſi de ſuite: nous les ferons connoître lorſque nous traiterons des nombres complexes.

20. Mais de toutes les diviſions & ſubdiviſions qu'on peut faire de l'unité, celle qui ſe fait par décimales, c'eſt-à-dire, en partageant l'unité en par-

ties de dix en dix fois plus petites, eſt inconteſtablement la plus commode dans les calculs. Elle eſt fort en uſage dans la pratique des Mathématiques; la formation & le calcul des décimales ſont abſolument les mêmes que pour les nombres ordinaires ou entiers : nous allons les faire connoître.

21. Pour évaluer, en décimales, les parties plus petites que l'unité, on conçoit que cette unité, telle qu'elle ſoit, livre, toiſe, &c. eſt compoſée de 10 parties, comme on imagine la dixaine compoſée de dix unités ſimples. Ces nouvelles unités, par oppoſition aux dixaines, ſont nommées *dixièmes*; & comme dix fois plus petites que l'unité, on les place à la droite du chiffre qui repréſente les unités.

Mais pour prévenir l'équivoque, & ne point donner lieu de prendre les unités pour des dixaines, on eſt convenu en même temps de fixer, une fois pour toutes, la place des unités, par une marque particulière : celle qui eſt le plus en uſage, eſt une virgule que l'on met à la droite du chiffre qui repréſente les unités, ou, ce qui eſt la même choſe, entre les unités & les dixièmes.

Ainſi, pour marquer vingt-quatre unités & trois dixièmes, on écrira 24,3.

22. On peut, de même, regarder actuellement les dixièmes, comme des unités qui ont été formées de dix autres, chacune dix fois plus petite que les dixièmes; & par la même raiſon d'analogie, les placer à la droite des *dixièmes*. Ces nouvelles unités, dix fois plus petites que les dixièmes, ſeront cent fois plus petites que les unités principales, & pour cette raiſon ſeront nommées *centièmes*.

Ainſi, pour marquer vingt-quatre unités, trois dixièmes, & cinq centièmes, on écrira 24,35.

23. Concevons pareillement les centièmes, comme formés de dix parties; ces parties feront mille fois plus petites que l'unité principale, & pour cette raison seront nommées *millièmes*; & comme dix fois plus petites que les *centièmes*, on les placera à la droite de celles-ci. En continuant de subdiviser ainsi de dix en dix, on formera de nouvelles unités qu'on nommera successivement des *dix-millièmes*, *cent-millièmes*, *millionièmes*, *dix-millionièmes*, *cent-millionièmes*, *billionièmes*, &c. & qu'on placera dans des rangs de plus en plus reculés sur la droite de la virgule.

24. Les parties de l'unité, que nous venons de décrire, sont ce qu'on appelle les *décimales*.

25. Quant à la maniere de les énoncer, elle est la même que pour les autres nombres. Après avoir énoncé les chiffres qui sont à la gauche de la virgule, on énonce les décimales de la même maniere; mais on ajoute à la fin, le nom des unités décimales de la dernière espèce.

Ainsi, pour énoncer ce nombre 34,572; on diroit trente-quatre unités, & cinq cents soixante-douze *millièmes*; si c'étoient des toises, par exemple, on diroit trente-quatre toises & cinq cents soixante-douze *millièmes* de toises.

La raison en est facile à appercevoir, si on fait attention que dans le nombre 34,572, le chiffre 5 peut indifféremment être rendu, ou par cinq *dixièmes*, ou par cinq cents *millièmes*, puisque le *dixième* ayant été composé de 10 *centièmes*, & le *centième* de 10 *millièmes*, le *dixième* contiendra 100 *millièmes*. Il en est de même du chiffre 7, qu'on peut indifféremment énoncer, sept *centièmes*, ou soixante-dix *millièmes*, puisque le *centième* a été composé de 10 *millièmes*.

26. A l'égard de l'eſpèce des unités du dernier chiffre, on la trouvera toujours facilement, en comptant ſucceſſivement de gauche à droite, ſur chaque chiffre depuis la virgule, les noms ſuivans.... *dixièmes, centièmes, millièmes, dix-millièmes*, &c.

27. Si l'on n'avoit point d'unités entières, mais ſeulement des parties de l'unité, on mettroit un zéro pour tenir la place des unités; ainſi, pour marquer 125 *millièmes*, on écriroit 0,125. Si on vouloit marquer 25 *millièmes*, on écriroit 0,025 en mettant un zéro, tant pour marquer qu'il n'y a point de *dixièmes*, que pour donner aux parties ſuivantes leur véritable valeur. Par la même raiſon, pour marquer 6 *dix-millièmes*, on écriroit 0,0006.

28. Examinons, maintenant, les changemens qu'on peut faire naître dans un nombre, par le déplacement de la virgule.

Puiſque la virgule détermine la place des unités, & que tous les autres chiffres ont des valeurs dépendantes de leurs diſtances à cette même virgule; ſi on avance la virgule d'une, deux, ou trois, &c. places ſur la gauche, on rend le nombre, 10, 100, 1000, &c. fois plus petit; & au contraire, on le rend 10, 100, 1000, &c. fois plus grand, ſi on recule la virgule d'une, deux, trois, &c. places ſur la droite.

En effet, ſi on a le nombre 4327,5264; & qu'en avançant la virgule d'une place ſur la gauche, on écrive 432,75264, il eſt viſible que les milles du premier nombre, ſont des centaines dans le nouveau; les centaines, ſont des dixaines; les dixaines, des unités; les unités, des dixièmes; les dixièmes, des centièmes; & ainſi de ſuite. Donc chaque partie du premier nombre, eſt devenue 10 fois plus petite par

ce déplacement. Si au contraire, en reculant la virgule d'une place ſur la droite, on eût écrit 43275,264; les milles du premier nombre, ſe trouveroient changés en dixaines de mille; les centaines, en milles; les dixaines, en centaines; les unités, en dixaines; les dixièmes, en unités; & ainſi de ſuite. Donc le nouveau nombre eſt 10 fois plus grand que le premier.

Un raiſonnement ſemblable fait voir qu'en avançant, ſur la gauche, de deux ou de trois places, on rendroit le nombre 100 ou 1000 fois plus petit; & au contraire 100 ou 1000 fois plus grand, en reculant la virgule de deux ou de trois places ſur la droite.

29. La dernière obſervation que nous ferons ſur les décimales, eſt qu'on n'en change point la valeur, en mettant à la ſuite du dernier chiffre décimal, tel nombre de zéros qu'on voudra. Ainſi, 43, 25 eſt la même choſe que 43, 250, ou que 43, 2500, ou que 43,25000, &c.

Car chaque *centième* valant 10 *millièmes*, ou 100 *dix-millièmes*, &c. les 25 *centièmes* vaudront 250 *millièmes*, ou 2500 *dix-millièmes*, &c. en un mot, c'eſt la même choſe que lorſqu'au lieu de dire 3 ſous, on dit 36 deniers.

Des Opérations de l'Arithmétique.

30. Ajouter, ſouſtraire, multiplier, & diviſer, ſont les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique. Toutes les queſtions qu'on peut propoſer ſur les nombres, ſe réduiſent à pratiquer quelques-unes de ces opérations, ou toutes ces opérations. Il eſt donc important de ſe les rendre familières, & d'en bien ſaiſir l'eſprit.

31. Le but de l'Arithmétique eſt, comme nous l'avons déja dit, de donner des moyens de calculer facilement les nombres. Ces moyens conſiſtent à réduire le calcul des nombres les plus compoſés, à celui de nombres plus ſimples, ou exprimés par le plus petit nombre de chiffres poſſible. C'eſt ce qu'il s'agit d'expoſer actuellement.

De l'Addition des Nombres entiers & des Parties décimales.

32. Exprimer la valeur totale de pluſieurs nombres, par un ſeul, eſt ce qu'on appelle *faire une addition.*

Pour trouver cette valeur totale, qu'on appelle *ſomme*, il faut obſerver la règle ſuivante.

Ecrivez, les uns ſous les autres, tous les nombres propoſés, de manière que les chiffres des unités de chacun, ſoient dans une même colonne verticale; qu'il en ſoit de même des dixaines, de même des centaines, &c. ſoulignez le tout.

Ajoutez, d'abord, tous les nombres qui ſont dans la colonne des unités; ſi la ſomme ne paſſe pas 9, écrivez-la au-deſſous; ſi elle ſurpaſſe 9, elle renfermera des dixaines; n'écrivez au-deſſous que l'excédent du nombre des dixaines: comptez ces dixaines, pour autant d'unités, & ajoutez-les avec les nombres de la colonne ſuivante: obſervez à l'égard de la ſomme des nombres de cette ſeconde colonne, la même règle qu'à l'égard de la première, & continuez ainſi, de colonne en colonne, juſqu'à la dernière, au-deſſous de laquelle vous écrirez la ſomme telle que vous la trouverez. Eclairciſſons cette règle par des exemples.

EXEMPLE I.

Qu'il ſoit queſtion d'ajouter 54925 avec 2023 : j'écris ces deux nombres comme on le voit ici . . 54925
2023
56948 ſomme.

Et après avoir ſouligné le tout, je commence par les unités, en diſant 5 & 3 font 8, que j'écris ſous cette même colonne.

Je paſſe à celle des dixaines, dans laquelle je dis 2 & 2 font 4, que j'écris au-deſſous.

A la colonne des centaines, je dis 9 & 0 ſont 9, que j'écris ſous cette même colonne.

Dans la colonne des milles, je dis 4 & 2 ſont 6, que j'écris ſous cette colonne.

Enfin dans la colonne des dixaines de milles, je dis 5 & rien ſont 5, que j'écris de même au-deſſous.

Le nombre 56948, trouvé par cette opération, eſt la ſomme des deux nombres propoſés, puiſqu'il en renferme les unités, les dixaines, les centaines, les milles, & les dixaines de milles, que nous avons raſſemblées ſucceſſivement.

EXEMPLE II.

On demande la ſomme des quatre nombres ſuivans, 6903, 7854, 953, 7327 : je les écris comme on les voit ci-deſſous.

6903
7854
953
7327
23037 ſomme.

Et en commençant, comme ci-deſſus, par la droite, je dis 3 & 4 font 7, & 3 font 10, & 7 font 17; j'écris les 7 unités ſous la premiere colonne, & je retiens la dixaine pour la joindre, comme unité, aux nombres de la colonne ſuivante, qui ſont auſſi des dixaines.

Paſſant à cette ſeconde colonne, je dis 1 que je retiens & 0 font 1, & 5 font 6, & 5 font 11, & 2 font 13; j'écris 3 ſous la colonne actuelle, & je retiens, pour la dixaine, une unité que j'ajoute à la colonne ſuivante, en diſant 1 & 9 font 10, & 8 font 18, & 9 font 27, & 3 font 30; je poſe 0 ſous cette colonne, & je retiens pour les trois dixaines, trois unités, que j'ajoute à

la colonne ſuivante, en diſant pareillement 3 & 6 font 9, & 7 valent 16, & 7 font 23 ; j'écris trois ſous cette colonne, & comme il n'y a plus d'autre colonne, j'avance d'une place les deux dixaines qui appartiendroient à la colonne ſuivante, s'il y en avoit une. Le nombre 23037, eſt la ſomme des quatre nombres propoſés.

33. S'il y a des parties décimales, comme elles ſe comptent par dixaines, à meſure qu'on avance de droite à gauche, ainſi que les autres nombres, la règle pour les ajouter eſt abſolument la même, en obſervant de mettre toujours les unités de même ordre, dans une même colonne.

Ainſi, ſi on propoſe d'ajouter les trois nombres 72,957.... 12,8.... 124,03, j'écrirai 72,957
12,8
124,03
209,787 ſomme.

Et en ſuivant la règle ci-deſſus, j'aurai 209,787 pour la ſomme.

De la Souſtraction des Nombres entiers & des Parties décimales.

34. La ſouſtraction eſt l'opération par laquelle on retranche un nombre, d'un autre nombre. Le réſultat de cette opération, s'appelle *reſte* ou *excès* ou *différence*.

35. Pour faire cette opération, on écrira le nombre qu'on veut retrancher, au-deſſous de l'autre, de la même manière que dans l'addition ; & ayant ſouligné le tout, on retranchera, en allant de droite à gauche, chaque nombre inférieur, de ſon correſpondant ſupérieur ; c'eſt-à-dire, les unités, des unités ; les dixaines, des dixaines, &c. on écrira chaque reſte au-deſſous, dans le même ordre, & zéro lorſqu'il ne reſtera rien.

Lorſque le chiffre inférieur ſe trouvera plus grand que le chiffre ſupérieur correſpondant, on ajoutera à celui-ci, dix unités qu'on aura, en empruntant par la penſée, une unité ſur ſon voiſin à gauche, lequel doit, par cette raiſon, être regardé comme moindre d'une unité, dans l'opération ſuivante.

EXEMPLE I.

On propoſe de retrancher 5432, de 8954. J'écris ces deux nombres comme il ſuit.

8954
5432
3522 reſte.

Et en commençant par le chiffre des unités, je dis 2 ôté de 4, il reſte 2 que j'écris au-deſſous : puis, paſſant aux dixaines, je dis 3 ôté de 5, il reſte 2 que j'écris ſous les dixaines. A la troiſième colonne, je dis 4 ôté de 9, il reſte 5 que j'écris ſous cette colonne. Enfin à la quatrième, je dis 5 ôté de 8, il reſte 3 que j'écris ſous 5, & j'ai 3522 pour le reſte de 5432 retranché de 8954.

EXEMPLE II.

On veut ôter 7987, de 27646.
On écrira..... 27646
7987
19659 reſte.

Comme on ne peut ôter 7 de 6, on ajoutera à 6, dix unités qu'on empruntera en prenant une unité ſur ſon voiſin 4, & on dira 7 ôté de 16, il reſte 9 qu'on écrira ſous 7.

Paſſant aux dixaines, on ne dira plus 8 ôté de 4, mais 8 ôté de 3 ſeulement, parce que l'emprunt qu'on a fait, a diminué 4 d'une unité : comme on ne peut ôter 8 de 3, on ajoutera de même à 3, dix unités qu'on empruntera, en prenant une unité ſur le chiffre 6 de la gauche ; & on dira 8 ôté de 13, il reſte 5 qu'on écrira ſous 8. Paſſant à la troiſième colonne, on dira, de

même, 9 ôté de 5, ou plutôt 9 ôté de 15 (en empruntant comme ci-deſſus), il reſte 6 qu'on écrira ſous 9.

A la quatrième colonne, on dira, par la même raiſon, 7 ôté de 6, ou plutôt de 16, il reſte 9 qu'on écrira ſous 7, & comme il n'y a rien à retrancher dans la cinquième colonne, on écrira ſous cette colonne, non pas 2, parce qu'on vient d'emprunter une unité ſur ce 2, mais ſeulement 1, & on aura 19659 pour le reſte.

36. Si le chiffre ſur lequel on doit faire l'emprunt, étoit un zéro, l'emprunt ſe feroit non pas ſur ce zéro, mais ſur le premier chiffre ſignificatif qui viendroit après; mais quoique ce ſoit alors emprunter 100 ou 1000 *ou* 10000, ſelon qu'il y a un, deux, ou *trois* zéros conſécutifs, on n'en opérera pas moins comme ci-deſſus; c'eſt-à-dire, qu'on ajoutera *ſeulement* 10, au chiffre pour lequel on em*prunte*; & comme ces dix, ſont cenſés pris ſur les 100 ou 1000, &c. qu'on a empruntés, pour employer les 90 ou les 990, &c. qui reſtent, on comptera les zéros ſuivans, pour autant de neuf; c'eſt ce que l'exemple ci-deſſous va éclaircir.

EXEMPLE III.

	99
Si de.....	20064
on veut retrancher	17489
	2575 reſte.

On dira d'abord, 9 ôté de 4, ou plutôt de 14 (en empruntant ſur le chiffre ſuivant) il reſte 5. Puis pour ôter 8 de 5, comme cela ne ſe peut, & qu'il n'eſt pas poſſible non plus d'emprunter ſur le chiffre ſuivant qui eſt un zéro, on empruntera ſur le 2, une unité, laquelle vaut mille à l'égard du chiffre ſur lequel on opère. De ce mille, on ne prendra que 10 qu'on ajoutera à 5, & on dira 8 ôté de 15, il reſte 7.

Comme on n'a employé que 10 unités ſur mille qu'on a empruntées, on emploiera les 990 reſtantes, pour en retrancher les nombres qui répondent au-deſſous des zéros; ce qui revient

au même que de compter chaque zéro, comme s'il valoit 9 ; ainſi l'on dira 4 ôté de 9 reſte 5, puis 7 ôté de 9 reſte 2, & enfin 1 ôté de 1 il ne reſte rien.

37. S'il y a des parties décimales dans les nombres ſur leſquels on veut opérer, on ſuivra abſolument la même règle ; mais pour éviter tout embarras dans l'application de cette règle, il n'y aura qu'à rendre le nombre des chiffres décimaux le même dans chacun des deux nombres propoſés, en mettant un nombre ſuffiſant de zéros à la ſuite de celui qui a le moins de décimales ; cette préparation ne change rien à la valeur de ce nombre (29).

EXEMPLE IV.

De 5403,25
on veut ôter 385,6532

Je mets deux zéros à la ſuite des décimales du nombre ſupérieur, après quoi j'opere ſur les deux nombres ainſi préparés, préciſément ſelon l'énoncé de la règle.

5403,2500
385,6532
5017,5968 reſte ;

& je trouve pour reſte 5017,5968.

Au lieu de diminuer d'une unité le chiffre ſur lequel on a emprunté ; on peut, ſi l'on veut, le laiſſer tel qu'il eſt, & augmenter, au contraire, d'une unité, celui que l'on doit en retrancher : le reſte ſera toujours le même.

De la preuve de l'Addition & de la Souſtraction.

38. Ce qu'on appelle *preuve d'une opération arithmétique*, eſt une autre opération que l'on fait pour s'aſſurer de l'exactitude du réſultat de la premiere.

La preuve de l'addition ſe fait en ajoutant de nouveau

nouveau par parties, mais en commençant par la gauche, les ſommes qu'on a déjà ajoutées. On retranche la totalité de la première colonne, de la partie qui lui répond dans la ſomme inférieure : on écrit au-deſſous, le reſte, qu'on réduit par la penſée en dixaines, pour le joindre au chiffre ſuivant de cette même ſomme, & du total on retranche encore la totalité de la colonne ſupérieure; on continue ainſi juſqu'à la dernière colonne, dont la totalité retranchée ne doit laiſſer aucun reſte.

Ainſi, ayant trouvé ci-deſſus que les quatre nombres

6903
7854
953
7327

ont pour ſomme..... 23037
3xxφ

Pour vérifier ce réſultat, j'ajoute les mêmes nombres en commençant par la gauche, & je dis 6 & 7 font 13, & 7 font 20, leſquels ôtés de 23, il reſte 3 ou 3 dixaines, qui avec le chiffre ſuivant 0 font 30. Je paſſe à la ſeconde colonne, & je dis 9 & 8 font 17, & 9 font 26, & 3 font 29 que j'ôte de 30; il reſte 1 ou une dixaine, qui jointe au chiffre ſuivant 3 fait 13. J'ajoute tous les nombres de la troiſième colonne, en diſant 5 & 5 font 10, & 2 font 12, qui ôtés de 13, il reſte 1 ou une dixaine, laquelle ajoutée au chiffre ſuivant 7 fait 17; j'ajoute pareillement tous les nombres de la dernière colonne, en diſant 3 & 4 font 7, & 3 font 10, & 7 font 17, qui ôtés de 17, il ne reſte rien : d'où je conclus que la première opération eſt exacte.

39. La preuve de la ſouſtraction ſe fait en ajoutant le reſte trouvé par l'opération, avec le nombre retranché; ſi la première opération a été bien faite, on doit reproduire le nombre dont on a retranché.

Ainſi je vois que dans le troiſième exemple que nous avons donné ci-deſſus, l'opération a été bien faite, parce qu'en

ajoutant 17489 (nombre retranché) avec le reſte 2575, je reproduis 20064, nombre dont on a retranché.

20064
17489
2575
20064

De la Multiplication.

40. Multiplier un nombre par un autre, c'eſt prendre le premier de ces deux nombres, autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre. Multiplier 4 par 3, c'eſt prendre 4, trois fois.

41. Le nombre qu'on doit multiplier, s'appelle le *multiplicande*; celui par lequel on doit multiplier, s'appelle le *multiplicateur*; & le réſultat de l'opération s'appelle *produit*.

42. Le mot *produit* a communément une acception beaucoup plus étendue; mais nous avertiſſons expreſſément que nous ne l'emploierons que pour déſigner le réſultat de la multiplication.

Le multiplicande & le multiplicateur ſe nomment auſſi, *facteurs* du produit; ainſi 3 & 4 ſont les facteurs de 12, parce que 3 fois 4 font 12.

43. Suivant l'idée que nous venons de donner de la multiplication, on voit qu'on pourroit faire cette opération en écrivant le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, & faiſant enſuite l'addition; par exemple, pour multiplier 7 par 3, on pourroit écrire..... 7
7
7
21.

Et la ſomme 21 réſultante de cette addition, ſeroit le produit.

Mais lorſque le multiplicateur eſt tant ſoit peu conſidérable, l'opération devient fort longue ; ce que nous appellons proprement *multiplication*, eſt la méthode de parvenir à ce même réſultat, par une voie plus courte.

44. Tant qu'on ne conſidère les nombres que d'une manière abſtraite ; c'eſt-à-dire ſans faire attention à la nature de leurs unités ; il importe peu, lequel des deux nombres propoſés pour la multiplication, on prenne pour multiplicande ou pour multiplicateur.

Par exemple, ſi on a 4 à multiplier par 3, il eſt indifférent de multiplier 4 par 3, ou 3 par 4, le produit ſera toujours 12 : en effet, 3 fois 4, ne ſont autre choſe que le triple de 1 fois 4 ; & 4 fois 3 ſont le triple de 4 fois 1 : or il eſt évident que 1 fois 4 & 4 fois 1 ſont la même choſe ; & on peut appliquer le même raiſonnement à tout autre nombre.

45. Mais lorſque par l'énoncé de la queſtion, le multiplicateur & le multiplicande ſont des nombres concrets, il importe de diſtinguer le multiplicande du multiplicateur : cette attention eſt principalement néceſſaire dans la multiplication des nombres complexes, dont nous parlerons par la ſuite.

Au reſte, cela eſt toujours aiſé à diſtinguer : la queſtion qui conduit à la multiplication dont il s'agit, fait toujours connoître quelle eſt la quantité qu'il s'agit de répéter pluſieurs fois ; c'eſt-à-dire, le multiplicande ; & quelle eſt celle qui marque combien de fois on doit répéter le multiplicande ; c'eſt-à-dire, quel eſt le multiplicateur.

46. Comme le multiplicateur eſt deſtiné à marquer combien de fois on doit prendre le multiplicande, il eſt toujours un nombre abſtrait.

Ainſi quand on demande ce que doivent coûter 52 toiſes de bois, à raiſon de 36 livres la toiſe ; on voit que le multiplicande eſt 36 livres, qu'il s'agit de répéter 52 fois, ſoit que ce 52 marque des toiſes ou toute autre choſe.

47. Le produit qui eſt formé de l'addition répétée du multiplicande, aura donc des unités de même nature que le multiplicande.

Après cette petite digreſſion ſur la nature des unités du produit & de ſes facteurs, revenons à la méthode pour trouver ce produit.

48. Les règles de la multiplication des nombres les plus compoſés, ſe réduiſent à multiplier un nombre d'un ſeul chiffre par un nombre d'un ſeul chiffre. Il faut donc s'exercer à trouver ſoi-même le produit des nombres exprimés par un ſeul chiffre, en ajoutant ſucceſſivement un nombre à lui-même.

On peut auſſi, ſi on le veut, faire uſage de la Table ſuivante qu'on attribue à Pythagore.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La première bande de cette Table ſe forme en ajoutant 1 à lui-même, ſucceſſivement.

La ſeconde, en ajoutant 2, de même.

La troiſième, en ajoutant 3, & ainſi de ſuite.

49. Pour trouver par le moyen de cette table, le produit de deux nombres exprimés par un ſeul chiffre chacun, on cherchera l'un de ces deux nombres, le multiplicande, par exemple, dans la bande ſupérieure; & en partant de ce nombre, on deſcendra verticalement juſqu'à ce qu'on ſoit vis-à-vis du multiplicateur qu'on trouvera dans la première colonne. Le nombre ſur lequel on ſe ſera arrêté, ſera le produit.

Ainſi pour trouver, par exemple, le produit de 9 par 6, ou combien font 6 fois 9; je deſcends depuis 9, pris dans la première bande, juſques vis-à-vis de 6 pris dans la première colonne; le nombre ſur lequel je m'arrête eſt 54, par conſéquent 6 fois 9 font 54.

En voilà autant qu'il en faut pour paſſer à la multiplication des nombres exprimés par pluſieurs chiffres.

De la Multiplication par un nombre d'un ſeul chiffre.

50. Ecrivez le multiplicateur, qu'on ſuppoſe ici d'un ſeul chiffre, ſous le multiplicande, peu importe ſous quel chiffre; mais pour fixer les idées, ſuppoſons que ce ſoit ſous le chiffre des unités.

Multipliez, d'abord, le nombre des unités, par votre multiplicateur; & ſi le produit ne contient que des unités, écrivez ce produit au-deſſous; s'il contient des unités & des dixaines, écrivez ſeulement les unités, & comptant les dixaines pour autant d'unités, retenez celles-ci.

Multipliez, de même, le nombre des dixaines

du multiplicande, & au produit ajoutez les unités que vous avez retenues; écrivez le tout au-deſſous, s'il peut être marqué par un ſeul chiffre; ſinon, n'écrivez que les unités de ce produit, & retenez-en les dixaines qui ſont des centaines, pour les ajouter au produit ſuivant qui ſera pareillement des centaines.

Continuez de multiplier ſucceſſivement, ſuivant la même règle, tous les chiffres du multiplicande; la ſuite des chiffres que vous aurez écrits marquera le produit.

EXEMPLE.

On demande combien 2864 toiſes, valent de pieds. La toiſe eſt de 6 pieds. La queſtion ſe réduit à prendre 6 pieds, 2864 fois, ou ce qui revient au même (44) à prendre 2864 pieds, 6 fois.

J'écris donc.....	2864	multiplicande.
	6	multiplicateur.
	17184	.... produit.

Et je dis, en commençant par les unités, 6 fois 4 ſont 24; j'écris 4, & je retiens 2 unités pour les deux dixaines.

2°. 6 fois 6 ſont 36, & deux que j'ai retenues ſont 38; je poſe 8 & je retiens 3.

3°. 6 fois 8 ſont 48, & 3 que j'ai retenues ſont 51; je poſe 1 & je retiens 5.

4°. 6 fois 2 ſont 12, & 5 que j'ai retenues ſont 17 que j'écris en entier, parce qu'il n'y a plus rien à multiplier. Le nombre 17184 eſt le produit demandé, ou le nombre de pieds que valent les 2864 toiſes, puiſqu'il renferme 6 fois les 4 unités, 6 fois les 6 dixaines, 6 fois les 8 centaines, & 6 fois les 2 mille, & par conſéquent 6 fois le nombre 2864.

De la Multiplication par un nombre de pluſieurs chiffres.

51. Lorſque le multiplicateur a pluſieurs chiffres, il faut faire ſucceſſivement avec chacun de ces chiffres, ce que l'on vient de preſcrire lorſqu'il n'y en a qu'un, mais en commençant toujours par la

droite : ainſi, on multipliera d'abord tous les chiffres du multiplicande, par le chiffre des unités du multiplicateur, puis par celui des dixaines, & on écrira ce ſecond produit ſous le premier ; mais comme il doit être un nombre de dixaines, puiſque c'eſt par des dixaines qu'on multiplie, on portera le premier chiffre de ce produit ſous les dixaines, & les autres chiffres toujours en avançant ſur la gauche.

Le troiſième produit qui ſe fera en multipliant par les centaines, ſe placera de même ſous le ſecond, mais en avançant encore d'une place ; on ſuivra la même loi pour les autres.

Toutes ces multiplications étant faites, on ajoutera les produits particuliers qu'elles ont donnés, & la ſomme ſera le produit total.

EXEMPLE.

On propoſe de multiplier 65487
par 6958

523896
327435
589383
392912

455658546 produit.

Je multiplie d'abord 65487, par le nombre 8 des unités du multiplicateur, & j'écris ſucceſſivement ſous la barre, les chiffres du produit 523896 que je trouve en ſuivant la règle donnée pour le premier cas (50).

Je multiplie, de même, le nombre 65487 par le ſecond chiffre 5 du multiplicateur, & j'écris le produit 327435 ſous le premier produit, mais en plaçant le premier chiffre 5 ſous les dixaines de ce premier produit.

Multipliant pareillement 65487 par le troiſième chiffre 9, j'écris le produit 589383 ſous le précédent, mais en plaçant le premier chiffre 3 au rang des centaines, parce que le nombre par lequel je multiplie eſt un nombre de centaines.

Enfin je multiplie 65487, par le dernier chiffre 6 du multiplicateur, & j'écris le produit 392922, ſous le précédent, en avançant encore d'une place, afin que ſon dernier chiffre occupe la place des milles, parce que le chiffre par lequel on multiplie marque des milles : enfin j'ajoute tous ces produits, & j'ai 455658546 ; pour le produit de 65487 multiplié par 6958, c'eſt-à-dire pour la valeur de 65487 pris 6958 fois. En effet, on a pris 65487, 8 fois par la première opération, 50 fois par la ſeconde, 900 fois par la troiſième, & 6900 fois par la quatrième.

52. Si le multiplicande ou le multiplicateur, ou tous les deux, étoient terminés par des zéros ; on abrégeroit l'opération, en multipliant comme ſi ces zéros n'y étoient point ; mais on les mettroit enſuite, tous, à la ſuite du produit.

EXEMPLE.

On propoſe de multiplier 6500
par..... 350

325
195

2275000

Je multiplie ſeulement 65 par 35, & je trouve 2275, à côté duquel j'écris les trois zéros qui ſe trouvent, en tout, à la ſuite du multiplicande & du multiplicateur. En effet, le multiplicande 6500, repréſente 65 centaines ; ainſi quand on multiplie 65, on doit ſous-entendre que le produit eſt des centaines. Pareillement le multiplicateur 350, marque 35 dixaines ; ainſi quand on multiplie par 35, on doit ſous-entendre que le produit ſera des dixaines ; il ſera donc des dixaines de centaines, c'eſt à dire, des mille ; il doit donc avoir 3 zéros : on appliquera un raiſonnement ſemblable à tous les autres cas.

53. Lorſqu'il ſe trouve des zéros entre les chiffres du multiplicateur, comme la multiplication par ces zéros ne donneroit que des zéros, on ſe diſpenſera d'écrire ceux-ci dans le produit ; & paſſant tout de ſuite à la multiplication par le premier chiffre ſignificatif qui vient après ces zéros, on en avancera le

produit ſur la gauche d'autant de places plus une qu'il y a de zéros qui ſuivent dans le multiplicateur; c'eſt-à-dire de deux places s'il y a un zéro, de trois s'il y en a deux.

EXEMPLE.

Si l'on a..... 42052
à multiplier par 3006

252312
126156

126408312

Après avoir multiplié par 6, & écrit le produit 252312, on multipliera tout de ſuite par 3, mais on écrira le produit 126156, de manière qu'il marque des mille; il faudra donc le reculer de trois places, c'eſt-à-dire, d'une place de plus qu'il n'y a de zéros interpoſés aux chiffres du multiplicateur.

De la Multiplication des Parties décimales.

54. Pour multiplier les parties décimales, on obſervera la même regle que pour les nombres entiers, ſans faire aucune attention à la virgule; mais après avoir trouvé le produit, on en ſéparera ſur la droite, par une virgule, autant de chiffres qu'il y a de décimales, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.

EXEMPLE I.

On propoſe de multiplier 54,23
par..... 8,3

16269
43384

450,109

Je multiplierai 5423, par 83; le produit ſera 450109; & comme il y a 2 décimales dans le multiplicande, & une dans le

multiplicateur, je ſéparerai trois chiffres ſur la droite de ce produit, qui par-là deviendra 450,109, tel qu'il doit être.

La raiſon de cette règle eſt facile à ſaiſir, en obſervant que ſi le multiplicateur étoit 83, le produit n'auroit en décimales que des *centièmes*, puiſqu'on auroit répété 83 fois le multiplicande 54,23 dont les décimales ſont des centièmes; mais comme le multiplicateur eſt 8,3; c'eſt-à-dire, dix fois plus petit que 83, le produit doit donc être dix fois plus petit que dans ce premier cas; le dernier chiffre de ſes décimales doit donc être des *millièmes;* il doit donc y avoir trois chiffres décimaux dans ce produit; c'eſt-à-dire, autant qu'il y en a, tant dans le multiplicande, que dans le multiplicateur.

On peut appliquer un raiſonnement ſemblable à tout autre cas.

Exemple II.

Si on avoit.....	0,12
à multiplier par	0,3
	0,036

On multiplieroit 12 par 3, ce qui donneroit 36; comme la règle preſcrit de ſéparer ici trois chiffres, on pourroit être embarraſſé à y ſatisfaire; mais ſi on reprend le raiſonnement que nous avons appliqué à l'exemple précédent, on verra facilement qu'il faut, comme on le voit ici, interpoſer un zéro entre 36 & la virgule. En effet, ſi on avoit 0,12 à multiplier par 3, il eſt évident qu'on auroit 0,36; mais comme on n'a à multiplier que par 0,3, c'eſt-à-dire, par un nombre dix fois plus petit que 3, on doit avoir un produit dix fois plus petit que 0,36, c'eſt-à-dire, des millièmes, & c'eſt ce qui a lieu (28) lorſqu'on écrit 0,036.

Sur quelques uſages de la Règle précédente.

55. Nous ne nous propoſons pas de faire connoître tous les uſages qu'on peut faire de la multiplication. Nous en indiquerons ſeulement quelques-uns qui mettront ſur la voie pour les autres.

56. La multiplication ſert à trouver, en général, la valeur totale de pluſieurs unités, lorſqu'on connoît la valeur de chacune.

Par exemple, 1°. combien doivent coûter 5842 toiſes, à raiſon de 54ᵗ la toiſe? Il faut multiplier 54ᵗ par 5842, ou (41) 5842ᵗ par 54; on aura 315468ᵗ pour le prix total demandé. 2°. Si une bombe de 8 pouc. pèſe 42 liv., combien pèſeront 5954 bombes de pareil diamètre? Il faut multiplier 42 par 5954, ou 5954 par 42; on aura 250068 pour le poids total de 5954 bombes.

57. On emploie la multiplication pour convertir des unités d'une certaine eſpèce, en unités d'une eſpèce plus petite. Par exemple, pour réduire les livres en ſols, & ceux-ci en deniers; les toiſes en pieds, ceux-ci en pouces, ces derniers en lignes; les jours en heures, celles-ci en minutes, ces dernières en ſecondes; on a ſouvent beſoin de ces ſortes de converſions. Nous en donnerons quelques exemples.

Si on demande de convertir 8ᵗ 17ˢ 7ᵈ en deniers; comme la livre vaut 20 ſous, on multipliera les 8ᵗ par 20 (52), ce qui donnera 160 ſous, auxquels joignant les 17 ſous, on aura 177 ſous, qu'on multipliera par 12, parce que chaque ſou vaut 12 den. & on aura 2124 den. leſquels joints aux 7 deniers, donnent 2131 deniers pour la valeur de 8ᵗ 17ˢ 7ᵈ convertis en deniers.

Si on demande combien une année commune, ou 365 jours, 5 heures, 48 minutes, ou 365ʲ 5ʰ 48′, valent de minutes? comme le jour eſt de 24 heures, on multipliera 24ʰ par 365, & au produit 8760ʰ on ajoutera 5ʰ; on multipliera le total 8765, par 60, (52) parce que l'heure contient 60 minutes, & on aura 525900, auxquelles ajoutant 48 minutes, on aura 525948 pour le nombre de minutes contenues dans une année commune.

De la diviſion des Nombres entiers & des Parties décimales.

58. *Diviſer* un nombre par un autre, c'eſt, en

général, chercher combien de fois le premier de ces deux nombres contient le ſecond.

Le nombre qu'on doit diviſer s'appelle *Dividende*; celui par lequel on doit diviſer, *Diviſeur*; & celui qui marque combien de fois le dividende contient le diviſeur, s'appelle *Quotient*.

On n'a pas toujours pour but dans la diviſion de ſavoir combien de fois un nombre en contient un autre; mais on fait l'opération dans tous les cas, comme ſi elle tendoit à ce but; c'eſt pourquoi on peut, dans tous les cas, la conſidérer comme l'opération par laquelle on trouve combien de fois le dividende contient le diviſeur.

Il ſuit de-là que ſi on multiplie le diviſeur par le quotient, on doit reproduire le dividende; puiſque c'eſt prendre ce diviſeur, autant de fois qu'il eſt dans le dividende: cela eſt général, ſoit que le quotient ſoit un nombre entier, ſoit qu'il ſoit un nombre fractionnaire.

Quant à l'eſpèce des unités du quotient, ce n'eſt ni par l'eſpèce de celles du dividende, ni par l'eſpèce de celles du diviſeur, ni par l'une & l'autre qu'il faut en juger; car le dividende & le diviſeur reſtant les mêmes, le quotient qui ſera auſſi toujours le même numériquement, peut être fort différent pour la nature de ſes unités, ſelon la queſtion qui donne lieu à cette diviſion.

Par exemple, s'il eſt queſtion de ſavoir combien 8^{tt} contiennent 4^{tt}, le quotient ſera un nombre abſtrait qui marquera 2 fois. Mais s'il eſt queſtion de ſavoir combien pour 8^{tt} on fera faire d'ouvrage à raiſon de 4^{tt} la toiſe, le quotient ſera 2 toiſes, qui eſt un nombre concret, & dont l'eſpèce n'a aucun rapport avec le dividende ni avec le diviſeur.

Mais on voit en même temps, que la queſtion ſeule qui conduit à faire la diviſion dont il s'agit, décide la nature des unités du quotient.

De la Diviſion d'un nombre compoſé de pluſieurs chiffres par un nombre qui n'en a qu'un.

59. L'opération que nous allons décrire, ſuppoſe qu'on ſache trouver combien de fois un nombre d'un ou deux chiffres, contient un nombre d'un ſeul chiffre. C'eſt une connoiſſance déja acquiſe, quand on ſait de mémoire les produits des nombres qui n'ont qu'un chiffre.

On peut auſſi, pour parvenir, faire uſage de la Table que nous avons donnée ci-deſſus (48). Par exemple, ſi je veux ſavoir combien de fois 74 contient 9, je cherche le diviſeur 9 dans la bande ſupérieure, & je deſcens verticalement juſqu'à ce que je rencontre le nombre le plus approchant de 74, c'eſt ici 72; alors le nombre 8 qui ſe trouve vis-à-vis 72, dans la première colonne, eſt le nombre de fois, ou le quotient que je cherche.

Cela ſuppoſé, voici comment ſe fait la diviſion d'un nombre qui a pluſieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un.

Ecrivez le diviſeur à côté du dividende, ſéparez l'un de l'autre par un trait, & ſoulignez le diviſeur ſous lequel vous écrirez les chiffres du quotient, à meſure que vous les trouverez.

Prenez le premier chiffre ſur la gauche du dividende, ou les deux premiers chiffres, ſi le premier ne contient pas le diviſeur.

Cherchez combien ce premier ou ces deux premiers chiffres contiennent le diviſeur; écrivez ce nombre de fois ſous le diviſeur.

Multipliez le diviſeur par le quotient que vous venez d'écrire, & portez le produit ſous la partie du dividende que vous venez d'employer.

Enfin retranchez le produit, de la partie ſupérieure du dividende à laquelle il répond, & vous aurez un reſte.

A côté de ce reſte, abaiſſez le chiffre ſuivant du dividende principal ; & vous aurez un ſecond dividende partiel, ſur lequel vous opérerez comme ſur le premier, plaçant le quotient à droite de celui qu'on a déja trouvé, multipliant de même le diviſeur, par ce quotient, écrivant & retranchant le produit comme ci-devant.

Vous abaiſſerez, de même, à côté du reſte de cette diviſion, le chiffre du dividende qui ſuit celui que vous avez abaiſſé, & vous continuerez toujours de la même maniere juſqu'au dernier incluſivement.

Cette règle va être éclaircie par l'exemple ſuivant.

EXEMPLE.

On propoſe de diviſer 8769 par 7.

J'écris ces deux nombres, comme on les voit ici :

dividende	7 diviſeur
8769	
7	1252 5/7 quotient.
17	
14	
36	
35	
19	
14	
5	

Et commençant par la gauche du dividende, je devrois dire, en 8 mille, combien de fois 7 ? mais je dis ſimplement en 8, combien de fois 7 ? il y eſt une fois. Cet 1 eſt naturellement mille, mais les chiffres qui viendront après, lui donneront ſa véritable valeur ; c'eſt pourquoi j'écris ſimplement 1 ſous le diviſeur.

Je multiplie le diviſeur 7 par le quotient 1, & je porte le produit 7 ſous la partie 8 que je viens de diviſer ; faiſant la ſouſtraction, j'ai pour reſte 1.

Ce reſte 1, eſt la partie de 8 qui n'a pas été diviſée, & eſt une dixaine à l'égard du chiffre ſuivant 7 ; c'eſt pourquoi j'abaiſſe ce même chiffre 7 à côté, & je continue l'opération, en diſant en 17, combien de fois 7 ? 2 fois. J'écris ce 2 à la droite du premier quotient 1 qu'a donné la première opération.

Je multiplie, comme dans la première opération, le diviſeur 7 par le quotient 2 que je viens de trouver; je porte le produit 14 ſous mon dividende partiel 17, & faiſant la ſouſtraction, il me reſte 3 pour la partie qui n'a pu être diviſée.

A côté de ce reſte 3, j'abaiſſe 6, troiſième chiffre du dividende, & je dis en 36 combien de fois 7? 5 fois; j'écris 5 au quotient.

Je multiplie le diviſeur 7 par 5; & ayant écrit le produit 35 ſous mon nouveau dividende partiel, je l'en retranche, & il me reſte 1.

Enfin, à côté de ce reſte 1, j'abaiſſe le chiffre 9 du dividende, & je dis en 19 combien de fois ſept? 2 fois; j'écris 2 au quotient.

Je multiplie le diviſeur 7, par ce nouveau quotient 2, & ayant écrit le produit 14 ſous mon dernier dividende partiel 19; j'ai pour reſte 5.

Je trouve donc que 8769 contiennent 7, autant de fois que le marque le quotient que nous avons écrit, c'eſt-à-dire, 1252 fois, & qu'il reſte 5.

A l'égard de ce reſte, nous nous contenterons pour le préſent de dire qu'on l'écrit à côté du quotient, comme on le voit dans cet exemple, c'eſt-à-dire, en écrivant le diviſeur au-deſſous de ce reſte, & ſéparant l'un de l'autre par un trait; & alors on prononce *cinq ſeptièmes*. Nous expliquerons par la ſuite la nature de ces ſortes de nombres.

60. Si dans la ſuite de l'opération, quelqu'un des dividendes partiels ſe trouvoit ne pas contenir le diviſeur, on écriroit zéro au quotient, & omettant la multiplication, on abaiſſeroit tout de ſuite un autre chiffre à côté de ce dividende partiel, & on continueroit la diviſion.

EXEMPLE.

Il s'agit de diviſer 14464 par 8.

14464	8
8	1808
64	
64	
064	
64	
0	

Je prends, ici, les deux premiers chiffres du dividende, parce que le premier ne contient pas le diviſeur.

Je trouve que 14 contient 8, 1 fois ; j'écris 1 au quotient ; je multiplie 8 par 1, & je retranche le produit 8 de 14, ce qui me donne pour reſte 6, à côté duquel j'abaiſſe le troiſième chiffre 4 du dividende.

Je continue en diſant : en 64 combien de fois 8 ? huit fois ; j'écris 8 au quotient, & faiſant la multiplication ; j'ai pour produit 64 que je retranche du dividende partiel 64 ; il me reſte 0 à côté duquel j'abaiſſe 6, quatrième chiffre du dividende ; & comme 6 ne contient pas huit, j'écris 0 au quotient, & j'abaiſſe tout de ſuite, à côté de 6, le dernier chiffre du dividende qui eſt ici 4, pour dire en 64 combien de fois 8 ? il y eſt 8 fois : après avoir écrit 8 au quotient, je fais la multiplication, & je retranche le produit 64 ; & comme il ne reſte rien, j'en conclus que 14464, contiennent 8, 1808 fois.

De la Diviſion par un nombre de pluſieurs chiffres.

61. Lorſque le diviſeur aura pluſieurs chiffres, on ſe conduira de la manière ſuivante.

Prenez ſur la gauche du dividende autant de chiffres qu'il eſt néceſſaire pour contenir le diviſeur.

Cela poſé, au lieu de chercher, comme ci-deſſus, combien la partie du dividende que vous avez priſe, contient votre diviſeur entier, cherchez ſeulement combien de fois le premier chiffre de votre diviſeur eſt compris dans le premier chiffre de votre dividende, ou dans les deux premiers, ſi le premier ne ſuffit pas ; marquez ce quotient ſous le diviſeur comme ci-devant.

Multipliez ſucceſſivement, ſelon la règle donnée (50), tous les chiffres de votre diviſeur, par ce quotient, & portez à meſure, les chiffres du produit, ſous les chiffres correſpondants de votre dividende partiel. Faites la ſouſtraction, & à côté du reſte abaiſſez le chiffre ſuivant du dividende, pour continuer l'opération de la même manière.

Nous allons éclaircir ceci par quelques exemples, &

& prévenir en même-temps, les cas qui peuvent cauſer quelqu'embarras.

EXEMPLE I.

On propoſe de diviſer 75347 par 53.

75347	53
53	1421 $\frac{14}{53}$
223	
212	
114	
106	
87	
53	
34	

Je prends ſeulement les deux premiers chiffres du dividende, parce qu'ils contiennent le diviſeur ; & au lieu de dire en 75, combien de fois 53, je cherche ſeulement combien les 7 dixaines de 75 contiennent les 5 dixaines de 53, c'eſt-à-dire, combien 7 contient 5 ? je trouve une fois que j'écris au quotient.

Je multiplie 53 par 1, & je porte le produit 53 ſous 75 : la ſouſtraction faite, il reſte 22, à côté duquel j'abaiſſe le chiffre 3 du dividende, & je pourſuis, en diſant, pour plus de facilité, en 22 combien de fois 5, (au lieu de dire en 223 combien de fois 53 ; je trouve 4 fois, que j'écris au quotient.

Je multiplie ſucceſſivement par 4, les deux chiffres du diviſeur, & je porte le produit 212 ſous mon dividende partiel 223 ; la ſouſtraction faite, j'ai pour reſte 11 ; j'abaiſſe à côté de ce reſte, le chiffre 4 du dividende, & je dis ſimplement comme ci-deſſus, en 11 combien de fois 5 ? 2 fois ; je l'écris au quotient, & je multiplie 53 par 2, ce qui me donne 106 que j'écris ſous le dividende partiel 114 ; faiſant la ſouſtraction, j'ai pour reſte 8 à côté duquel j'abaiſſe le dernier chiffre ; je diviſe de même 87, & continuant comme ci-deſſus, je trouve 1 pour quotient, & 34 pour reſte que j'écris à côté du quotient, de la manière qui a été indiquée plus haut (59).

62. On devroit, à la rigueur, chercher combien de fois chaque dividende partiel contient le diviſeur entier ; mais comme cette recherche ſeroit ſouvent longue & pénible, on ſe contente, comme on

vient de le voir, de chercher combien la partie la plus forte de ce dividende contient la partie la plus forte du diviſeur. Le quotient qu'on trouve par cette voie, n'eſt pas toujours le véritable, parce qu'en prenant ce parti, on ne fait réellement qu'une eſtimation approchée; mais outre que cette eſtimation met preſque toujours ſur le but, & que dans les cas où elle n'y met pas, elle en écarte peu; la multiplication qui vient enſuite, ſert à redreſſer ce qu'il peut y avoir de défectueux dans ce jugement. En effet, ſi le dividende partiel contenoit réellement le diviſeur, trois fois, par exemple; & que par l'eſſai qu'on fait, on eût trouvé qu'il le contient 4 fois, il eſt facile de voir qu'en faiſant la multiplication par 4, on auroit un produit plus grand que le dividende, puiſqu'on prendroit le diviſeur plus de fois qu'il n'eſt réellement dans ce dividende, & par conſéquent la ſouſtraction deviendra impoſſible; alors on diminuera le quotient ſucceſſivement d'une, deux, &c. unités, juſqu'à ce qu'on trouve un produit qu'on puiſſe retrancher: au contraire ſi on n'avoit mis que 2 au quotient, le reſte de la ſouſtraction ſe trouveroit plus grand que le diviſeur; ce qui prouveroit que le diviſeur y eſt encore contenu, & que par conſéquent le quotient eſt trop foible.

Au reſte on acquiert en peu de temps l'uſage de prévoir de combien on doit diminuer ou augmenter le quotient que donne la première épreuve.

EXEMPLE II.

On propoſe de diviſer 189492 par 375.

189492	375
1875	505 $\frac{117}{375}$
1992	
1875	
117	

Je prends les quatre premiers chiffres du dividende, parce que les trois premiers ne contiennent pas le diviſeur.

Je dis enſuite, en 18 ſeulement, combien de fois 3 ? il y eſt réellement 6 fois ; mais en multipliant 375 par 6, j'aurois plus que mon dividende 1894 ; c'eſt pourquoi j'écris ſeulement 5 au quotient. Je multiplie 375 par 5 ; & après avoir écrit le produit ſous 1894, je fais la ſouſtraction, & j'ai pour reſte 19.

J'abaiſſe à côté de 19, le chiffre 9 du dividende ; & comme 199 que j'ai alors, ne contient pas 375, je poſe 0 au quotient, & j'abaiſſe à côté de 199, le chiffre 2 du dividende, ce qui me donne 1992, pour lequel je dis en 19 ſeulement combien de fois 3 ? 6 fois. Mais par la même raiſon que ci-deſſus, je n'écris au quotient, que 5 ; & après avoir opéré comme ci-devant, j'ai pour reſte 117.

63. C'eſt pour rendre la méthode plus facile à ſaiſir, que nous avons preſcrit d'écrire ſous chaque dividende partiel, le produit qu'on trouve en multipliant le diviſeur par le quotient ; mais comme le but de l'Arithmétique doit être d'abréger les opérations, nous croyons devoir faire remarquer qu'on peut ſe diſpenſer d'écrire ces produits, & faire la ſouſtraction à meſure qu'on a multiplié chaque chiffre du diviſeur. L'exemple ſuivant ſuffira pour faire entendre comment ſe fait cette ſouſtraction.

EXEMPLE.

On veut diviſer 756984 par 932.

756984	932
1138	812 $\frac{100}{932}$
2064	
200	

Après avoir pris les quatre premiers chiffres du dividende, qui ſont néceſſaires pour contenir le diviſeur, je trouve que 75 contient 9, 8 fois ; c'eſt pourquoi j'écris 8 au quotient ; mais au lieu de porter ſous 7569 le produit de 932 par 8, je multiplie d'abord deux par 8, ce qui me donne 16 ; mais comme je ne

puis ôter 16 de 9, j'emprunte ſur le chiffre ſuivant 6 une dixaine, qui jointe à 9 me donne 19, duquel ôtant 16, il me reſte 3 que j'écris au-deſſous.

Pour tenir compte de cette dixaine empruntée ; au lieu de diminuer d'une unité le chiffre 6 ſur lequel j'ai emprunté, je retiens cette unité que je vais ajouter au produit ſuivant ; ainſi continuant la multiplication, je dis 8 fois 3 font 24, & 1 que j'ai retenu font 25 ; comme je ne puis ôter 25 de 6, j'emprunte ſur le chiffre ſuivant 5 du dividende, deux dixaines, qui jointes à 6 me donnent 26, deſquelles j'ôte 25, & il me reſte 1 que j'écris ſous 6 ; par-là, j'ai tenu compte de la première dixaine dont j'aurois dû diminuer 6, parce que j'ai retranché une dixaine de plus. Je tiendrai de même compte des deux dixaines que je viens d'emprunter ; je continue donc, en diſant 8 fois 9 font 72, & 2 que j'ai empruntés font 74, leſquels ôtés de 75, il reſte 1.

J'abaiſſe à côté du reſte 113, le chiffre 8 du dividende, & je continue de la même manière en diſant en 11 combien de fois 9 ? 1 fois ; puis 1 fois 2, fait 2, qui ôtés de 8, il reſte 6 ; 1 fois 3 fait 3, qui ôtés de 3, il reſte 0 ; 1 fois 9 eſt 9, qui ôtés de 11, il reſte 2. J'abaiſſe le chiffre 4 à côté du reſte 206, & je dis en 20 combien de fois 9 ? 2 fois ; & faiſant la multiplication, 2 fois 2 font 4, qui ôtés de 4, il reſte 0 ; 2 fois 3 font 6, qui ôtés de 6, il reſte 0 ; & enfin 2 fois 9 font 18, qui ôtés de 20, il reſte 2.

Il peut arriver dans le cours de ces diviſions partielles, que le dividende contienne le diviſeur plus de 9 fois ; cependant on ne doit jamais mettre plus de 9 au quotient ; car ſi on pouvoit ſeulement mettre 10, ce ſeroit une preuve que le quotient trouvé par l'opération précédente, ſeroit faux, puiſque la dixaine qu'on trouveroit dans le quotient actuel appartiendroit à ce premier quotient.

64. Si le dividende & le diviſeur étoient ſuivis de zéros, on pourroit en ôter à l'un & à l'autre autant qu'il y en a à la ſuite de celui qui en a le moins.

Par exemple, pour diviſer 8000 par 400, je diviſerai ſeule-

ment 80 par 4; car il eſt évident que 80 centaines ne contiennent pas plus 4 centaines, que 80 unités ne contiennent 4 unités.

De la Diviſion des Parties décimales.

65. Pour ne point nous arrêter à des diſtinctions ſuperflues, nous réduirons l'opération de la diviſion des décimales à cette ſeule règle.

Mettez à la ſuite de celui des deux nombres propoſés, qui a le moins de décimales, un nombre de zéros ſuffiſant pour que le nombre des décimales ſoit le même dans chacun; cela ne changera rien à la valeur de ce nombre (29); ſupprimez la virgule dans l'un & dans l'autre, & faites l'opération comme pour les nombres entiers; il n'y aura rien à changer au quotient que vous trouverez.

EXEMPLE.

On propoſe de diviſer 12,52 par 4,3.

J'écris..... 12,52 | 4,3

Ou plutôt 12,52 | 4,30

en complétant le nombre des décimales.

Supprimant la virgule, j'ai 1252 à diviſer par 430;

faiſant l'opération..... 1252 | 430 / $2\frac{392}{430}$

392

Je trouve 2 pour quotient, & 392 pour reſte, c'eſt-à-dire que le quotient eſt 2 & $\frac{392}{430}$.

Mais comme l'objet qu'on ſe propoſe quand on ſe ſert de décimales, eſt d'éviter les fractions ordinaires; au lieu d'écrire le reſte ſous la forme de fraction, comme on l'a pratiqué juſqu'ici, on continuera l'opération comme dans l'exemple ſuivant.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{r|l} 1252 & 430 \\ \hline & 2,9116 \\ 3920 & \\ 500 & \\ 700 & \\ 2700 & \\ 120 & \end{array}$$

Après avoir trouvé le quotient, en entiers, qui eſt ici 2, on mettra à côté du reſte 392, un zéro qui, à la vérité, rendra ce reſte dix fois trop grand; on continuera de diviſer par 430, & ayant trouvé qu'il faudroit mettre 9 au quotient, on l'y mettra en effet, mais après avoir marqué la place des unités entières, en mettant une virgule après le 2; par ce moyen le 9 ne marquera plus que des dixièmes: après la multiplication & la ſouſtraction faites, on mettra à côté du reſte 50, un zéro, ce qui eſt la même choſe que ſi on en avoit mis d'abord deux, à côté du dividende; mais en mettant après 9, le quotient 1 qu'on trouvera, on lui donnera par-là ſa véritable valeur, puiſqu'alors il marque des centièmes; on continuera ainſi tant qu'on le jugera néceſſaire. En s'en tenant à deux décimales, on a la valeur du quotient à moins d'un centième d'unité près; en pouſſant juſqu'à trois chiffres, on a le quotient à moins d'un millième près; & ainſi de ſuite; puiſqu'on n'auroit pas pu mettre une unité de plus ou de moins, ſans rendre le quotient trop fort ou trop foible.

Tous les reſtes de diviſion peuvent être réduits ainſi en décimales.

66. Il reſte à expliquer pourquoi la [illegible]reſſion de la virgule dans le dividende & dans le diviſeur, ne change rien au quotient, lorſqu'on a rendu le nombre des décimales le même dans chacun de ces deux nombres: c'eſt ce qu'il eſt aiſé d'appercevoir, parce que dans l'exemple ci-deſſus, le dividende 12,52, & le diviſeur 4,30 ne ſont autre choſe que 1252 centièmes & 430 centièmes, puiſque les unités entières valent des centaines de centièmes (22); or il eſt clair que 1252 centièmes ne contiennent pas autrement 430 centièmes, que 1252 unités ne

contiennent 430 unités; donc la conſidération de la virgule eſt inutile quand on a complété le nombre des décimales.

De la preuve de la Multiplication & de la Diviſion.

67. On peut tirer de la définition même que nous avons donnée de chacune de ces deux opérations, le moyen d'en faire la preuve.

Puiſque, dans la multiplication, on prend le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient d'unités, il s'enſuit que ſi on cherche combien de fois le produit contient le multiplicande, c'eſt-à-dire (58), ſi on diviſe le produit par le multiplicande, on doit trouver pour quotient le multiplicateur; & comme on peut prendre le multiplicande pour le multiplicateur, *& vice versâ*; en général, *ſi on diviſe le produit d'une multiplication, par l'un de ſes facteurs, on doit trouver pour quotient l'autre facteur.*

Par exemple, ayant trouvé ci-deſſus (50) que 2864 multiplié par 6 a donné 17184, je diviſe 17184 par 2864, je dois trouver 6 & je trouve en effet 6 pour quotient.

68. Pareillement, puiſque le quotient d'une diviſion marque combien de fois le dividende contient le diviſeur, il s'enſuit que ſi on prend le diviſeur autant de fois qu'il eſt marqué par le quotient, c'eſt-à-dire, ſi on multiplie le diviſeur par le quotient, on doit reproduire le dividende lorſque la diviſion a été faite ſans reſte; & que dans le cas où il y a un reſte, ſi on multiplie le diviſeur par le quotient, & qu'au produit on ajoute le reſte de la diviſion, on doit reproduire le dividende.

Par exemple, nous avons trouvé ci-deſſus (62) que 18949

diviſé par 375, donnoit 505 pour quotient & 117 pour reſte; en multipliant 375 par 505, on trouve 189375; ajoutant le reſte 117, on retrouve le dividende 189492.

Ainſi la multiplication & la diviſion peuvent ſe ſervir de preuve réciproquement.

Sur quelques uſages de la Règle précédente.

69. La diviſion ſert, non-ſeulement à trouver combien de fois un nombre en contient un autre, mais encore à partager un nombre en parties égales. Prendre la moitié, le tiers, le quart, le cinquième, le vingtième, le trentième, &c. d'un nombre; c'eſt diviſer ce nombre par 2, 3, 4, 5, 20, 30, &c. ou le partager en 2, 3, 4, 5, 20, 30, &c. parties égales, pour prendre une de ces parties.

Entre pluſieurs exemples de cet uſage de la diviſion, nous choiſiſſons le cas où l'on veut trouver une quantité moyenne entre pluſieurs autres. Suppoſons qu'ayant fait dix épreuves d'un même mortier, on ait eu les dix portées ſuivantes:

COUPS.	PORTÉES.
1.....	1231 toiſes.
2.....	1192.
3.....	1223.
4.....	1200.
5.....	1227.
6.....	1144.
7.....	1186.
8.....	1219.
9.....	1229.
10.....	1164.
Somme des Portées..	12015.
Portée moyenne.....	$1201\frac{1}{10}$

Ce qu'on entend par quantité moyenne, c'eſt ce que ſeroit chaque quantité ſi, leur valeur totale reſtant la même, elles étoient toutes égales. Or il eſt clair, que ſi elles étoient toutes égales, pour avoir la valeur de chacune, il faudroit partager leur totalité en autant de parties qu'il y a de quantités. Il faut donc ici partager la ſomme 12015 en dix parties; c'eſt-à-dire la diviſer par 10; le quotient $1201\frac{5}{10}$ eſt la quantité, ou la portée moyenne, que l'on appelle ainſi, parce qu'elle tient une eſpèce de milieu entre toutes les autres.

Dans les calculs ordinaires de la pratique, on rejette la fraction, quand elle eſt au-deſſous d'une demi-unité; & lorſqu'au contraire, elle eſt au-deſſus, ou qu'elle vaut cette demi-unité, on compte une unité de plus.

70. La diviſion ſert encore à convertir les unités d'une certaine eſpèce, en unités d'une eſpèce ſupérieure; par exemple, un certain nombre de deniers, en ſous, & ceux-ci en livres.

Pour réduire 5864 deniers en ſous, on remarquera que puiſqu'il faut 12 deniers pour faire un ſou, autant de fois il y aura 12 deniers dans 5864 deniers, autant il y aura de ſous; il faut donc diviſer par 12; on trouvera 488^{f} & 8^{d} de reſte. Pour réduire en livres, les 488^{f}, on diviſera 488 par 20, puiſqu'il faut 20^{f} pour faire la livre, & on aura, en total, 24 liv. 8 ſous 8 deniers.

71. A l'occaſion de cette diviſion par 20, remarquons que quand on a à diviſer par un nombre ſuivi de zéros, on peut abréger l'opération, en ſéparant ſur la droite du dividende, autant de chiffres qu'il y a de zéros; on diviſe la partie qui reſte à gauche, par les chiffres ſignificatifs du diviſeur; s'il y a un reſte, on écrit à ſa ſuite, les chiffres qu'on a ſéparés; ce qui donne le reſte total.

Par exemple, pour diviſer 5834 par 20; je ſépare le chiffre 4, & je diviſe par 2 la partie 583; j'ai pour quotient 291, & 1 pour reſte; j'écris à côté de ce reſte 1, le chiffre ſéparé 4, ce qui me donne 14 pour reſte total; en ſorte que le quotient eſt $291\frac{14}{20}$.

72. *On voit par-là, que lorſqu'il s'agit de prendre*

le vingtième d'un nombre de livres proposé, cela se réduit à séparer le dernier chiffre sur la droite, compter ce dernier chiffre pour des sous, prendre la moitié des autres chiffres & la compter pour des livres ; si en prenant cette moitié il reste une unité, on la comptera pour une dixaine de sous qu'on placera à la gauche du chiffre qu'on a séparé d'abord.

Par exemple, si on veut avoir le vingtième de 54672 liv. je sépare le dernier chiffre 2, que je compte pour 2 sous, parce que la vingtième partie de 2^{tt} est 2 sous ; je prends la moitié de 5467^{tt} qui est 2733^{tt} ; & comme il me reste 1, j'ai 2733^{tt} 12 sous pour le vingtième demandé : on porte la dixaine restante, aux dixaines de sous, parce que le vingtième d'une dixaine de livres, est une dixaine de sous.

S'il s'agissoit du dixième, on prendroit tous les chiffres, excepté le dernier sur la droite, pour autant de livres : puis doublant ce dernier, on prendroit ce double pour des sous, parce que la dixième partie d'une livre vaut 2 sous.

Des Fractions.

73. Les fractions considérées arithmétiquement, sont des nombres par lesquels on exprime les quantités plus petites que l'unité.

74. Pour se faire une idée nette des fractions, il faut concevoir que la quantité qu'on a prise d'abord pour unité, est elle-même composée d'un certain nombre de parties ou d'unités plus petites ; comme on conçoit, par exemple, que la livre est composée de vingt parties, ou de vingt unités plus petites, qu'on appelle sous.

Une, ou plusieurs de ces parties, forment ce qu'on appelle une *fraction de l'unité* ; mais on donne aussi ce nom aux nombres qui les représentent.

75. Une fraction peut être exprimée en nombres, de deux manières qui sont chacune en usage.

La première manière consiste à représenter, comme les nombres entiers, les parties de l'unité que contient la quantité dont il s'agit ; mais alors, on donne un nom particulier à ces parties.

Ainsi, pour marquer 7 parties dont on en conçoit 20 dans la livre, on emploieroit le chiffre 7, mais on prononceroit 7 sous, & on écriroit 7^{s} : cette manière de marquer les parties de l'unité, a lieu dans les nombres complexes dont nous parlerons par la suite.

76. Mais comme il faudroit un signe particulier pour chaque division qu'on pourroit faire de l'unité, on évite cette multiplicité de signes, en marquant une fraction, par deux nombres placés l'un au-dessous de l'autre, & séparés par un trait.

Ainsi, pour marquer les sept parties dont il vient d'être question, on écrit $\frac{7}{20}$; c'est-à-dire, qu'en général, on écrit d'abord le nombre qui marque combien la quantité dont il s'agit contient de parties de l'unité ; & on écrit au-dessous de ce nombre, celui qui marque combien on conçoit de ces parties dans l'unité.

Et pour énoncer une fraction, on énonce d'abord le nombre supérieur (qui s'appelle le *numérateur*) ; ensuite le nombre inférieur (qui s'appelle le *dénominateur*) ; mais on ajoute au nom de celui-ci, la terminaison *ième*.

Par exemple, pour énoncer $\frac{7}{10}$, on prononcera *sept vingtièmes*. Pour énoncer $\frac{4}{5}$, on prononcera *quatre cinquièmes* : & par cette expression *quatre cinquièmes*, on doit entendre quatre parties dont il en faudroit cinq pour composer l'unité.

Il faut seulement excepter de la terminaison générale, les fractions dont le dénominateur est 2, ou 3, ou 4, qui se prononcent, *moitiés* ou *demis*, *tiers*, *quarts*. Ainsi ces fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, se prononceroient *un demi*, *deux tiers*, *trois quarts*.

77. Le numérateur marque donc combien la

quantité repréſentée par la fraction, contient de parties de l'unité ; & le dénominateur fait connoître de quelle valeur ſont ces parties, en marquant combien il en faut pour compoſer l'unité. On lui donne le nom de *dénominateur*, parce que c'eſt lui, en effet, qui donne le nom à la fraction, & qui fait que dans ces deux fractions, par exemple, $\frac{1}{5}$ & $\frac{2}{7}$, les parties de la première s'appellent des *cinquièmes*, & les parties de la ſeconde des *ſeptièmes*.

78. Le numérateur & le dénominateur s'appellent auſſi, d'un nom commun, les deux *termes de la fraction*.

Des Entiers conſidérés ſous la forme de Fractions.

79. Les opérations qu'on fait ſur les fractions, conduiſent ſouvent à des réſultats fractionnaires, dont le numérateur eſt plus grand que le dénominateur, par exemple, à des réſultats tels que $\frac{8}{3}$, $\frac{27}{5}$, &c.

Ces ſortes d'expreſſions ne ſont pas des fractions proprement dites, mais ce ſont des nombres entiers joints à des fractions.

80. Pour extraire les entiers qui s'y trouvent renfermés, il faut diviſer le numérateur, par le dénominateur. Le quotient marquera les entiers ; le reſte de la diviſion ſera le numérateur de la fraction qui accompagne ces entiers.

Ainſi $\frac{27}{5}$, donneront $5\frac{2}{5}$, c'eſt-à-dire, cinq entiers & deux cinquièmes.

En effet, dans l'expreſſion $\frac{27}{5}$, le dénominateur 5, fait connoître que l'unité eſt compoſée de 5 parties ;

donc autant de fois il y aura 5 dans 27, autant il y aura d'unités entières dans la valeur de la fraction $\frac{27}{5}$

80. Les multiplications & les diviſions des nombres entiers joints aux fractions, exigent du moins pour la facilité, qu'on convertiſſe ces entiers en fraction.

On fait cette converſion en multipliant le nombre entier par le dénominateur de la fraction en laquelle on veut réduire cet entier.

Par exemple, ſi on veut convertir 8 entiers en cinquièmes; on multipliera 8 par 5, & on aura $\frac{40}{5}$. En effet, lorſqu'on veut convertir 8, en cinquièmes, on regarde l'unité comme compoſée de 5 parties; les 8 unités, en contiendront donc 40 : pareillement $7\frac{4}{9}$ convertis en neuvièmes, feront $\frac{67}{9}$.

Des changemens qu'on peut faire ſubir aux termes d'une Fraction, ſans changer la valeur de cette Fraction.

81. Il eſt viſible que plus on concevra de parties dans l'unité, & plus il faudra de ces parties pour compoſer une même quantité.

Donc, on peut rendre le dénominateur d'une fraction, double, triple, quadruple, &c. ſans rien changer à la valeur de la fraction; pourvu qu'en même temps, on rende auſſi le numérateur, double, triple, quadruple, &c.

On peut donc dire, en général, *qu'une fraction ne change point de valeur, quand on multiplie ſes deux termes par un même nombre.*

Ainſi, $\frac{1}{4}$ eſt la même choſe que $\frac{6}{8}$; $\frac{1}{2}$, la même choſe que $\frac{3}{4}$, que $\frac{4}{8}$, que $\frac{5}{10}$, &c.

82. Par un raiſonnement ſemblable, on voit que moins il y aura de parties dans l'unité, moins il faudra de ces parties pour former une même quan-

tité; que par conſéquent, on peut, ſans changer une fraction, rendre ſon dénominateur 2, 3, 4, &c. fois plus petit, pourvu qu'en même temps, on rende ſon numérateur 2, 3, 4, &c. fois plus petit; & en général, *une fraction ne change point de valeur, quand on diviſe ſes deux termes, par un même nombre.*

Pour voir diſtinctement la vérité de ces deux propoſitions, il ſuffit de ſe rappeller ce que c'eſt que le dénominateur, & ce que c'eſt que le numérateur d'une fraction.

En effet, quand on multiplie, par exemple, le dénominateur d'une fraction par 4, il marque alors que l'unité eſt partagée en 4 fois plus de parties, leſquelles ſont par conſéquent 4 fois plus petites; il faut donc, pour que la fraction ne change pas de valeur, prendre quatre fois plus de parties; c'eſt ce qu'on fait en multipliant par 4, le numérateur, qui marque combien on prend de parties.

Remarquons donc, que multiplier ou diviſer les deux termes de la fraction par un même nombre, n'eſt point multiplier ou diviſer la fraction, puiſque, comme nous venons de le dire, elle ne change point de valeur par ces opérations.

Les deux principes que nous venons de poſer, ſont la baſe des deux réductions ſuivantes, qui ſont d'un très-grand uſage.

Réduction des Fractions à un même Dénominateur.

83. 1°. Pour réduire deux fractions à un même dénominateur, multipliez les deux termes de la première, chacun par le dénominateur de la ſeconde; & les deux termes de la ſeconde, chacun par le dénominateur de la première.

Par exemple, pour réduire à un même dénominateur, les

deux fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$; je multiplie 2 & 3, qui ſont les deux termes de la première fraction, chacun, par 4, dénominateur de la ſeconde, & j'ai $\frac{8}{12}$ qui (81) eſt de même valeur que $\frac{2}{3}$.

Je multiplie, de même, les deux termes 3 & 4, de la ſeconde fraction, chacun par 3, dénominateur de la première; & j'ai $\frac{9}{12}$ qui eſt de même valeur que $\frac{3}{4}$; en ſorte que les fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ ſont changées en $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$, qui ſont reſpectivement de même valeur que celles-là, & qui ont le même dénominateur entr'elles.

Il eſt aiſé de voir, que par cette méthode, le dénominateur ſera toujours le même pour chacune des deux nouvelles fractions; puiſque dans chaque opération, le nouveau dénominateur eſt formé de la multiplication des deux dénominateurs primitifs.

84. 2°. Si on a plus de deux fractions, on les réduira toutes au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacune, par le produit réſultant de la multiplication des dénominateurs des autres fractions.

Par exemple, pour réduire à un même dénominateur, les quatre fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$; je multiplierai les deux termes 2 & 3 de la première, par le produit des trois dénominateurs 4, 5, 7, des autres fractions, produit que je trouve en diſant: 4 fois 5, font 20; puis 7 fois 20, font 140; je multiplie donc 2 & 3 chacun par 140, & j'ai $\frac{280}{420}$, qui eſt de même valeur que $\frac{2}{3}$ (81).

Je multiplie pareillement, les deux termes 3 & 4 de la ſeconde fraction, par le produit de 3, 5, 7; produit que je forme en diſant: 3 fois 5, font 15; puis 7 fois 15, font 105; je multiplie donc 3 & 4, chacun par 105; ce qui me donne $\frac{315}{420}$, fraction de même valeur que $\frac{3}{4}$.

Paſſant à la troiſième fraction, je multiplie ſes deux termes 4 & 5, chacun par 84, produit des trois dénominateurs 3, 4 & 7; & j'ai $\frac{336}{420}$, au lieu de $\frac{4}{5}$.

Enfin, pour la quatrième, je multiplierai 5 & 7, chacun par le produit 60 des dénominateurs 3, 4, 5 des trois premières fractions, & j'aurai $\frac{300}{420}$, au lieu de $\frac{5}{7}$, enſorte que les quatre fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, ſont changées en $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, $\frac{300}{420}$, moins ſimples, à la vérité, que celles-là, mais de même valeur qu'elles, & plus ſuſceptibles, par leur dénominateur commun, des opérations de l'addition & de la ſouſtraction.

Remarquons que le dénominateur de chaque nouvelle fraction, étant formé du produit de tous les dénominateurs primitifs, ce nouveau dénominateur ne peut manquer d'être le même pour chaque fraction.

85. Cette règle peut être présentée sous un autre aspect, qui conduit à donner une expression plus simple, des fractions réduites à un dénominateur commun, lorsque leurs dénominateurs actuels sont multiples les uns des autres, ou lorsqu'ils ont des diviseurs communs.

On prendra pour dénominateur commun, le plus petit nombre qui soit divisible exactement, par chacun des dénominateurs des fractions proposées : & pour avoir le numérateur qui, pour chaque fraction, conviendra à ce nouveau dénominateur, on multipliera le numérateur actuel de cette fraction, par le nombre de fois que son dénominateur actuel, est contenu dans le dénominateur commun.

Par exemple, si j'avois les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{12}$, à réduire à un même dénominateur ; je prendrois pour dénominateur commun 24 qui est le plus petit nombre, qui soit exactement divisible par tous ces dénominateurs : & comme 24 contient les dénominateurs 3, 4, 6, 8, 12, respectivement, autant de fois qu'il est exprimé par les nombres suivans 8, 6, 4, 3, 2, j'écris, comme on le voit ici, ces nombres, chacun sous la fraction correspondante,

$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{12}$
8	6	4	3	2

En multipliant chaque numérateur par le terme correspondant de la suite inférieure, j'ai

$$\frac{16}{24} \quad \frac{18}{24} \quad \frac{20}{24} \quad \frac{21}{24} \quad \frac{14}{24}$$

pour les fractions réduites au dénominateur commun le plus simple.

Réduction

Réduction des Fractions à leur plus ſimple expreſſion.

86. Une fraction eſt d'autant plus ſimple, que ſes deux termes ſont de plus petits nombres. Il eſt ſouvent poſſible d'amener une fraction propoſée, à être exprimée par de moindres nombres, & cela lorſque ſon numérateur & ſon dénominateur peuvent être diviſés par un même nombre; comme cette opération n'en change point la valeur (81), c'eſt une ſimplification qu'on ne doit pas négliger.

Voici le procédé qu'il faudra ſuivre.

87. On diviſera le numérateur & le dénominateur, chacun par 2; & on répétera cette diviſion tant qu'elle pourra être faite exactement.

On diviſera, enſuite, les deux termes, par 3, & on continuera de diviſer l'un & l'autre par 3, tant que cela pourra être fait.

On fera la même choſe ſucceſſivement, avec les nombres 5, 7, 11, 13, 17, &c. c'eſt à-dire, avec les nombres qui n'ont d'autre diviſeur qu'eux-mêmes, ou l'unité, & qu'on appelle *nombres premiers*.

Ainſi, la ſeule difficulté qu'il y ait, eſt de ſavoir quand eſt-ce qu'on pourra diviſer par 2, 3, 5, &c.

On pourra, dans cette recherche, s'aider des principes ſuivans.

Tout nombre qui finit par un chiffre pair, eſt diviſible par 2.

Tout nombre dont la ſomme des chiffres ajoutés enſemble, comme s'ils étoient des unités ſimples, ſera 3 ou un *multiple* de 3, c'eſt-à-dire un nombre exact de fois 3, ſera diviſible par 3.

Par exemple, 54231 eſt diviſible par 3, parce que ſes chiffres 5, 4, 2, 3, 1, font 15, qui eſt 5 fois 3.

La même choſe a lieu pour le nombre 9, ſi les chiffres, ajoutés enſemble, font 9, ou un multiple de 9.

Tout nombre terminé par un 5 ou par un zéro, eſt diviſible par 5.

A l'égard du nombre 7 & des ſuivans, quoiqu'il ſoit facile de trouver de pareilles règles, comme l'examen qu'elles ſuppoſent eſt auſſi long que la diviſion, il faudra eſſayer la diviſion.

Propoſons-nous pour exemple, de réduire la fraction $\frac{2016}{5796}$. Je diviſe les deux termes par 2, parce que les deux derniers chiffres de chacun, ſont pairs; & j'ai $\frac{1008}{2898}$. Je diviſe encore par 2, & j'ai $\frac{504}{1449}$. Ce qui a été dit ci-deſſus, m'apprend que je puis diviſer par 3; je diviſe en effet, & j'ai $\frac{168}{483}$; je diviſe encore par 3, ce qui me donne $\frac{56}{161}$; enfin j'eſſaie de diviſer par 7; la diviſion réuſſit & me donne $\frac{8}{23}$.

La raiſon pour laquelle nous avons preſcrit de ne tenter la diviſion que par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, &c. c'eſt qu'après avoir épuiſé la diviſion par 2, par exemple, il eſt inutile de tenter de diviſer par 4; puiſque ſi celle-ci pouvoit réuſſir, à plus forte raiſon la diviſion par 2, auroit-elle pu encore être faite.

88. *De tous les moyens qu'on peut employer pour réduire une fraction à une expreſſion plus ſimple, le plus direct, eſt celui de diviſer les deux termes par le plus grand diviſeur commun qu'ils puiſſent avoir : voici la règle pour trouver ce plus grand diviſeur commun.*

Diviſez le plus grand des deux termes par le plus petit; s'il n'y a pas de reſte, c'eſt le plus petit terme qui eſt le plus grand diviſeur commun.

S'il y a un reſte, diviſez ce plus petit terme, par ce reſte; & ſi la diviſion ſe fait exactement, c'eſt ce premier reſte qui eſt le plus grand diviſeur commun.

Si cette ſeconde diviſion donne un reſte; diviſez le premier reſte, par le ſecond; & continuez toujours de diviſer le reſte précédent, par le dernier reſte, juſqu'à ce que vous arriviez à une diviſion exacte. Alors, le dernier diviſeur que vous aurez

employé, ſera le plus grand diviſeur des deux termes de la fraction.

Si le dernier diviſeur ſe trouve être l'unité, c'eſt une preuve que la fraction ne peut être réduite.

Prenons pour exemple la fraction $\frac{3760}{9024}$.

Je diviſe 9024 par 3760 ; j'ai pour quotient 2, & pour reſte 1504.

Je diviſe 3760 par 1504 ; j'ai pour quotient 2, & pour reſte 752.

Je diviſe le premier reſte 1504, par le ſecond reſte 752 : la diviſion réuſſit, & j'en conclus que 752 peut diviſer les deux termes de la fraction $\frac{3760}{9024}$, *& la réduire à ſa plus ſimple expreſſion, qu'on trouve, en faiſant l'opération, être de* $\frac{5}{12}$.

En effet ; on a trouvé que 752 diviſe 1504 ; il doit donc diviſer 3760 qu'on a vu être compoſé de deux fois 1504 & de 752 : on voit de même qu'il doit diviſer 9024, puiſque 9024 eſt compoſé de deux fois 3760 & de 1504.

Il eſt, d'ailleurs, également facile de voir que 752 eſt le plus grand commun diviſeur des deux termes 9024 & 3760 : car tout diviſeur commun de ces deux nombres, doit diviſer le reſte 1504 de la diviſion de ces deux nombres : pareillement tout diviſeur commun de 3760 & 1504, doit diviſer le reſte 752 de la diviſion de ces deux nombres : or 752 ne peut être diviſé par un nombre plus grand que lui-même ; le plus grand commun diviſeur de 1504 & de 752, eſt donc 752. Et puiſque 3760 eſt compoſé de 2 fois 1504 plus 752, il ne peut donc avoir, avec 1504, de commun diviſeur plus grand que 752 ; & un raiſonnement ſemblable, fait voir qu'entre 9024 & 3760, il n'y en aura pas de plus grand que 752.

Différentes manières dont on peut enviſager une Fraction, & conſéquences qu'on peut en tirer.

89. L'idée que nous avons donnée juſqu'ici, d'une fraction, eſt que le dénominateur repréſente de combien de parties l'unité eſt compoſée ; & le numérateur, combien il y a de ces parties dans la quantité que la fraction exprime.

On peut encore enviſager une fraction, ſous un autre point de vue : on peut conſidérer le numérateur, comme repréſentant une certaine quantité

qui doit être divisée en autant de parties qu'il y a d'unités dans le dénominateur.

Par exemple, dans $\frac{4}{5}$, on peut considérer 4, comme représentant quatre choses quelconques, 4 livres par exemple, qu'il s'agit de partager en cinq parties; car il est évident que c'est la même chose de partager 4 livres en cinq parties, pour prendre une de ces parties, ou de partager une livre en cinq parties, pour en prendre 4.

90. On peut donc considérer le numérateur d'une fraction, comme un dividende, & le dénominateur, comme un diviseur. On voit par-là ce que signifient les restes de division, mis sous la forme que nous leur avons donnée (60).

91. Il suit de-là, 1° qu'un entier peut toujours être mis sous la forme d'une fraction, en faisant de cet entier, le numérateur; & lui donnant l'unité pour dénominateur; ainsi 8 ou $\frac{8}{1}$ sont la même chose; 5 ou $\frac{5}{1}$ sont la même chose.

92. 2°. Que pour convertir une fraction quelconque, en décimales; il n'y a qu'à considérer le numérateur, comme un reste de division où le dénominateur étoit diviseur, & opérer par conséquent, comme il a été dit (*page* 50), en observant de mettre d'abord un zéro, au quotient, pour tenir la place des unités; c'est ainsi qu'on trouvera que $\frac{3}{5}$ valent, en décimales, 0,6; que $\frac{5}{9}$, valent 0,555, &c. que $\frac{1}{25}$, vaut 0,04; & ainsi de suite.

De l'Addition des Fractions.

93. Si les fractions ont le même dénominateur, on ajoutera tous les numérateurs, & on donnera à la somme le dénominateur commun de ces fractions.

Ainſi, pour ajouter $\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{5}{7}$, j'ajoute les numérateurs 2, 3 & 5; & j'ai par conſéquent, $\frac{10}{7}$, que je réduis à $1\frac{3}{7}$ (80).

94. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on commencera par les y réduire par ce qui a été enſeigné (83 & ſuiv.); après quoi, on ajoutera ces nouvelles fractions, de la manière qui vient d'être preſcrite.

Ainſi, ſi on propoſe d'ajouter $\frac{3}{4}, \frac{3}{7}, \frac{4}{5}$; je change ces trois fractions, en ces trois autres $\frac{45}{60}, \frac{40}{60}, \frac{48}{60}$, dont la ſomme eſt $\frac{133}{60}$, qui ſe réduit à $2\frac{13}{60}$ (80).

De la Souſtraction des Fractions.

95. Si les deux fractions propoſées, ont le même dénominateur, on retranchera le numérateur de l'une, du numérateur de l'autre; & on donnera au reſte, le dénominateur commun de ces deux fractions.

S'il eſt queſtion de retrancher $\frac{1}{9}$, de $\frac{2}{9}$, le reſte ſera $\frac{1}{9}$ qui ſe réduit à $\frac{1}{3}$ (87).

Si de $9\frac{1}{8}$, on vouloit retrancher $4\frac{7}{8}$; comme on ne peut ôter $\frac{7}{8}$, de $\frac{1}{8}$, on emprunteroit ſur 9, une unité, laquelle réduite en huitièmes, & ajoutée à $\frac{1}{8}$, feroit $\frac{13}{8}$, deſquels ôtant $\frac{7}{8}$, il reſteroit $\frac{6}{8}$; ôtant enſuite 4, de 8 qui reſte après l'emprunt, il reſteroit en tout $4\frac{6}{8}$ ou $4\frac{3}{4}$.

96. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur; on les y réduira (83 & ſuiv.); après quoi, on fera la ſouſtraction comme il vient d'être dit.

Ainſi, pour ôter $\frac{3}{5}$, de $\frac{7}{8}$; je change ces fractions en $\frac{24}{40}$ & $\frac{35}{40}$; & retranchant 8, de 9, il me reſte $\frac{1}{11}$.

De la Multiplication des Fractions.

97 Pour multiplier une fraction, par une autre fraction; il faut multiplier le numérateur de l'une, par le numérateur de l'autre, & le dénominateur, par le dénominateur.

Par exemple, pour multiplier $\frac{2}{7}$, par $\frac{4}{5}$; on multipliera 2 par 4, ce qui donnera 8 pour numérateur; multipliant pareillement, 3 par 5, on aura 15 pour dénominateur; & par conséquent $\frac{8}{15}$, pour le produit.

Pour sentir la raison de cette règle, il faut se rappeller que, multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient d'unités. Ainsi, multiplier $\frac{2}{1}$ par $\frac{4}{5}$, c'est prendre $\frac{4}{5}$ de fois la fraction $\frac{2}{3}$; ou plus exactement, c'est prendre 4 fois la cinquième partie de $\frac{2}{3}$: or en multipliant le dénominateur 3, par 5, on change les tiers en cinquièmes, c'est-à-dire, en parties cinq fois plus petites; & en multipliant le numérateur 2, par 4, on prend ces nouvelles parties quatre fois; on prend donc quatre fois la cinquième partie de $\frac{2}{3}$: on multiplie donc, en effet, $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$.

98. Si on avoit un entier, à multiplier par une fraction; ou une fraction à multiplier par un entier; on mettroit l'entier sous la forme de fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur.

Par exemple, si j'ai 9 à multiplier par $\frac{4}{7}$; cela se réduit à multiplier $\frac{9}{1}$ par $\frac{4}{7}$, ce qui, selon la règle qu'on vient de donner, produit $\frac{36}{7}$ qui se réduisent à $5\frac{1}{7}$.

99. S'il y avoit des entiers joints aux fractions; il faudroit, avant de faire la multiplication, réduire ces entiers, chacun en fraction de même espèce que celle qui l'accompagne.

Par exemple, si on a $11\frac{3}{5}$, à multiplier par $9\frac{3}{4}$; je change (80) le multiplicande en $\frac{63}{5}$, & le multiplicateur en $\frac{39}{4}$; & je multiplie $\frac{63}{5}$ par $\frac{39}{4}$, selon la règle ci dessus (97); ce qui me donne $\frac{2457}{20}$, qui valent $122\frac{17}{20}$.

100. On pourroit, encore, faire cette même opération, en multipliant l'entier & la fraction du

multiplicande, par l'entier du multiplicateur; puis, par la fraction du même multiplicateur, en cette manière :.....

$$\begin{array}{rl} & 12\frac{3}{4} \\ & 9 \\ \hline \text{Produit de } 12 \text{ par } 9 \ldots\ldots\ldots & 108 \\ \text{de } \frac{1}{3} \text{ par } 9 \ldots\ldots\ldots & 5\frac{3}{4} \ldots\ldots \text{ ou } \frac{3}{4} \\ \text{de } 12 \text{ par } \frac{1}{4} \ldots\ldots\ldots & 9 \\ \text{de } \frac{1}{3} \text{ par } \frac{1}{4} \ldots\ldots\ldots & 0\frac{9}{10} \ldots\ldots \text{ ou } \frac{9}{10} \\ \hline & 122\frac{17}{10} \end{array}$$

Mais cette manière d'opérer eſt, en général, moins ſimple que la première.

Diviſion des Fractions.

101. Pour diviſer une fraction, par une autre fraction; il faut renverſer les deux termes de la fraction qui ſert de diviſeur, & multiplier la fraction dividende, par cette fraction ainſi renverſée.

Par exemple, pour diviſer $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$; je renverſe la fraction $\frac{2}{3}$, ce qui me donne $\frac{3}{2}$; je multiplie $\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{2}$, ſelon la règle donnée (97); & j'ai $\frac{12}{10}$ ou $1\frac{2}{10}$, pour le quotient de $\frac{4}{5}$ diviſé par $\frac{2}{3}$.

Pour appercevoir la raiſon de cette règle; il faut obſerver, que diviſer $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, c'eſt chercher combien de fois $\frac{4}{5}$ contiennent $\frac{2}{3}$: or il eſt facile de voir que, puiſque le diviſeur eſt des tiers, il ſera contenu dans le dividende, trois fois autant que s'il étoit compoſé de pareil nombre d'entiers: mais pour ſavoir combien 2 entiers ſeront contenus dans $\frac{4}{5}$, il faut diviſer par 2; donc, puiſque $\frac{2}{3}$ y ſont contenus 3 fois autant, il faut, après avoir diviſé par 2, multiplier par 3; ce qui n'eſt autre choſe que de multiplier par $\frac{1}{2}$, qui eſt la fraction diviſeur renverſée.

102. Si on avoit une fraction, à diviſer par un entier; ou un entier, à diviſer par une fraction; ou

commenceroit par mettre l'entier, ſous la forme de fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur.

Par exemple, ſi on a 12, à diviſer par $\frac{2}{7}$; on réduira l'opération à diviſer $\frac{12}{1}$ par $\frac{2}{7}$, ce qui, ſelon la règle qu'on vient de donner, ſe réduit à multiplier $\frac{12}{1}$ par $\frac{7}{2}$, & donne $\frac{84}{5}$ ou $16\frac{4}{5}$.

103. S'il y avoit des entiers joints aux fractions, on réduiroit ces entiers, chacun, en fraction de même eſpèce que celle qui l'accompagne.

Par exemple, ſi on avoit $54\frac{3}{5}$ à diviſer par $12\frac{3}{4}$; on changeroit le dividende, en $\frac{273}{5}$; & le diviſeur, en $\frac{51}{4}$; & l'opération ſeroit réduite à diviſer $\frac{273}{5}$ par $\frac{51}{4}$; c'eſt-à-dire (104) à multiplier $\frac{273}{5}$ par $\frac{4}{51}$; ce qui donneroit $\frac{1092}{255}$ ou $4\frac{52}{255}$.

Quelques applications des règles précédentes.

104. Après ce que nous avons dit (89 & ſuiv.), il eſt aiſé de voir comment on peut évaluer une fraction.

Qu'on demande, par exemple, ce que valent les $\frac{5}{7}$ d'une livre. Puiſque les $\frac{5}{7}$ d'une livre ſont la même choſe que le ſeptième de 5 livres, je réduis les 5 livres en ſous, & je diviſe les 100 ſous qu'elles me donnent, par 7, ce qui me donne 14 ſous pour quotient & 2 ſous de reſte; je réduis ces 2 ſous en deniers, & je diviſe 24 deniers par 7; j'ai 3 deniers $\frac{3}{7}$: ainſi, les $\frac{5}{7}$ d'une livre, ſont 14 ſous 3 deniers & $\frac{3}{7}$ de deniers.

Si on demandoit les $\frac{5}{7}$ de 24 livres, il eſt viſible qu'on pourroit d'abord prendre, comme nous venons de le faire, les $\frac{5}{7}$ d'une livre, & multiplier enſuite, par 24, ce qu'auroit donné cette opération; mais il eſt plus commode de multiplier d'abord $\frac{5}{7}$ par 24 livres, ce qui (98) donne $\frac{120}{7}$ livres, & d'évaluer enſuite cette dernière fraction qu'on trouvera valoir 17 livres $\frac{1}{7}$ ſous 10 deniers $\frac{2}{7}$.

105. On a ſouvent beſoin de ſavoir ce que produiſent les 4 deniers, ou 6 deniers pour livre, d'une ſomme propoſée.

Pour les 4 deniers: on ſéparera le dernier chiffre du nombre des livres de la ſomme propoſée, & on prendra le ſixième des

autres, que l'on comptera pour des livres. On joindra le reſte, s'il y en a, au chiffre ſéparé ; & on prendra le $\frac{1}{3}$, qui donnera les ſous & deniers.

Si dans la ſomme propoſée, il entre des ſous, on en prendra le cinquième que l'on comptera pour des deniers.

EXEMPLE.

On demande les 4 deniers pour livre de la ſomme de.....	3433^{liv}	10^{s}	0^{d}
Le ſixième de 343, eſt.....	57.	0.	0
Il reſte 1 qui joint, comme dixaine, au chiffre ſéparé 3, donne 13, dont le tiers eſt	0.	4.	4
Enfin le cinquième de 10 ſous, conſidérés comme deniers, eſt.....	0.	0.	2
	57.	4.	6

La raiſon de cette opération, eſt fondée ſur ce que les 4 deniers pour livre ſont les $\frac{4}{240}$ ou le $\frac{1}{60}$ de la livre. Il faut donc diviſer par 60 ; ce qui (71) ſe réduit à ce que nous preſcrivons : quant au reſte, il faudroit le réduire en ſous, en multipliant par 20, puis diviſer par 60 ; ce qui revient à prendre le tiers. On voit de même, que pour le 60e des ſous de la ſomme propoſée, il faudroit réduire ces ſous en deniers, en les multipliant par 12, puis diviſer par 60 ; ce qui revient à multiplier par $\frac{12}{60}$ ou $\frac{1}{5}$, c'eſt-à-dire, à prendre le $\frac{1}{5}$; s'il y avoit des deniers dans la ſomme propoſée, on les négligeroit, parce que le 60e de ces deniers ne donneroit pas un denier.

Pour prendre les ſix deniers pour livre ; on v[illegible] en raiſonnant de même, qu'il faut ſéparer le dernier chiffre des livres, prendre le quart des autres, que l'on comptera pour des livres, puis joignant le reſte, au chiffre ſéparé, prendre la moitié, qui donnera les ſous & deniers.

S'il y a des ſous dans la ſomme propoſée, on en prendra les $\frac{2}{10}$, que l'on comptera pour des deniers.

Quant aux deniers de la ſomme propoſée, on les rejettera.

EXEMPLE.

On demande les ſix deniers pour livre de la ſomme de.....	1387^{liv}	13^{s}	4^{d}
Le quart de 138, eſt.....	34.	0.	0
Il reſte 2, qui mis à côté du chiffre ſéparé 7, font 27, dont la moitié eſt.....	0.	13.	6
Les $\frac{1}{10}$ de 13 ſous, conſidérés comme des deniers, ſont.....	0.	0.	$3\frac{6}{10}$
TOTAL.....	34.	13.	10

106. Les fractions décimales n'ayant point de dénominateur, ſont encore plus faciles à évaluer.

Si on demande, par exemple, combien valent 0,532 de toiſe, comme la toiſe eſt de ſix pieds, je multiplierai 0,532 par 6, ce qui me donnera 3,192 pieds, c'eſt-à-dire 3^{pi}. & 0,192 de pieds; multipliant cette dernière fraction par 12 pour évaluer en pouces, on aura 2,304 pouces, c'eſt-à-dire 2^{po}. & 0,304 de pouce; enfin multipliant celles-ci par 12 pour réduire en lignes, on aura 3,648 lignes, ou 3^{l} & 0,648 de ligne; c'eſt-à-dire que la valeur de la fraction 0,532 de toiſe, ſera $3^{pi}\ 2^{po}\ 3^{l}$ & 0,648 de ligne.

107. Réciproquement, pour convertir les ſous-eſpèces d'un nombre complexe propoſé, en parties décimales de l'unité principale; il faut, à commencer par les unités de la plus baſſe eſpèce, diviſer ſucceſſivement, par le nombre qui marque combien de fois celles-ci ſont contenues dans l'eſpèce immédiatement ſupérieure.

Ainſi, dans l'exemple précédent, ſi je voulois ramener $0^{t}\ 3^{pi}\ 2^{po}\ 3^{l}$, 648 à des parties décimales de la toiſe, je diviſerois 3^{l}, 648 par 12; ce qui me donneroit 0^{po}, 304; j'aurois donc $0^{t}\ 3^{pi}\ 2^{po}$, 304; diviſant, maintenant 2^{po}, 304 par 12, j'aurois 0^{pi}, 192 & en total, $0^{t}\ 3^{pi}$; 192; enfin diviſant celui-ci par 6, j'auroi[illegible], 532.

Des Fractions de Fractions.

108. L'évaluation des fractions, nous conduit naturellement à parler *des Fractions de fractions :* on appelle ainſi une ſuite de fractions ſéparées les unes des autres par l'article *de;* par exemple $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$ *des* $\frac{1}{4}$ *de* $\frac{1}{8}$, &c. ſont des fractions de fractions. On les réduit à une ſeule fraction, en multipliant tous les numérateurs entr'eux, & tous les dénominateurs entr'eux; enſorte que la fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{1}{4}$ ſe réduit à $\frac{6}{12}$ ou $\frac{1}{2}$: la fraction $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{1}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, ſe réduit à $\frac{10}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

En effet, il eſt facile de voir que prendre les $\frac{2}{3}$

de $\frac{1}{4}$, n'eſt autre choſe que multiplier $\frac{1}{4}$ par $\frac{2}{3}$, puiſque c'eſt prendre $\frac{2}{3}$ de fois la fraction $\frac{1}{4}$; pareillement prendre les $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{1}{4}$ *de* $\frac{1}{6}$ revient à prendre les $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{1}{6}$; puiſque $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{1}{4}$ reviennent à $\frac{6}{12}$; & ce qu'on vient de dire fait connoître que les $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{1}{6}$ reviennent à $\frac{10}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

Si on demandoit les $\frac{1}{4}$ *de* $5\frac{1}{8}$, on convertiroit l'entier 5, en huitièmes; & la queſtion ſeroit réduite à évaluer la fraction de fraction $\frac{1}{4}$ *de* $\frac{41}{8}$, qu'on trouveroit être $\frac{41}{32}$ ou $4\frac{9}{32}$.

Au reſte, il n'eſt pas toujours néceſſaire de ramener une fraction de fraction, à être exprimée par une ſeule fraction. On évalue quelquefois plus aiſément la fraction de fraction, en la laiſſant ſous ſa forme actuelle, qu'en la réduiſant : en voici un exemple.

Dans les pièces de campagne, la ſaillie de l'embaze ſur le renfort en avant & joignant le tourillon, eſt de $\frac{1}{12}$ plus $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{12}$ du diamètre du boulet; ſi je veux ſavoir la valeur totale de cette ſaillie, pour une pièce de 12, ou le diamètre du boulet eſt de 3^{po} 4^{l} 9^{pts}, j'opère comme il ſuit.

Le $\frac{1}{12}$ du diamètre du boulet.....	0^{po}	4^{l}	4^{pts}	$\frac{1}{4}$
La moitié du $\frac{1}{12}$ ou $\frac{1}{2}$ du $\frac{1}{12}$.....	0.	2.	2	$\frac{1}{8}$
Donc la ſaillie eſt de.....	0.	6.	7	$\frac{1}{8}$

Des Nombres complexes.

109. Quoique les règles que nous avons expoſées juſqu'ici, puiſſent ſervir auſſi à calculer les nombres complexes, nous croyons cependant devoir conſidérer ceux-ci d'une manière plus particulière, parce que la diviſion qu'on y fait de l'unité principale, en facilite ſouvent le calcul.

Il y a pluſieurs ſortes de nombres complexes, & les règles, pour les calculer, tiennent beaucoup à la diviſion qu'on a faite de l'unité : cependant il

n'eſt pas néceſſaire d'examiner toutes ces eſpèces pour être en état de les calculer; mais il importe de ſavoir quels rapports leurs différentes parties ont, tant entr'elles, qu'à l'égard de l'unité principale.

On peut voir à la fin de ce Traité, la Table générale de ces rapports.

Addition des Nombres complexes.

110. Pour faire cette opération, on écrit tous les nombres propoſés, les uns au-deſſous des autres, de manière que toutes les parties d'une même eſpèce ſe trouvent chacune dans une même colonne verticale; & après avoir ſouligné le tout, on commence l'addition par les parties de l'eſpèce la plus petite : ſi leur ſomme ne compoſe pas une unité de l'eſpèce immédiatement ſupérieure, on l'écrit au-deſſous; ſi elle renferme aſſez de parties pour compoſer une ou pluſieurs unités de l'eſpèce immédiatement ſupérieure, on n'écrit, au-deſſous de cette colonne, que l'excédent d'un nombre juſte d'unités de cette ſeconde eſpèce, & on retient celles-ci pour les ajouter avec leurs ſemblables, ſur leſquelles on procède de la même manière.

Exemple I.

On propoſe d'ajouter.....	227^{liv}	14^{s}	8^{d}
	2549.	18.	5
	184.	11.	11
	17.	10.	7
	2979.	15.	7 ſomme.

La ſomme des deniers eſt 31, qui renferment 2 douzaines de deniers, ou 2 ſous, & 7 deniers. Je poſe les 7 deniers, & je retiens 2 ſous, que j'ajoute avec les unités de ſous, ce qui donne 15 ſous, dont je poſe ſeulement le chiffre 5, & je retiens la dixaine pour l'ajouter aux dixaines, ce qui me donne 5; & comme il faut 2 dixaines de ſous pour faire une livre, je prends

la moitié de 5, qui eſt 2, avec 1 pour reſte; je poſe ce reſte, & je porte les 2 livres à la colonne des livres, que j'ajoute comme à l'ordinaire.

EXEMPLE II.

On propoſe d'ajouter.....	54t	2pl	3po	9l
	12.	5.	4.	11
	9.	4.	11.	11
	8.	2.	9.	10
	85.	3.	6.	5

La ſomme des lignes monte à 41, qui font 3 pouces 5 lignes; je poſe 5 lignes & je retiens les 3 pouces, que j'ajoute avec les pouces: le tout me donne 30 pouces, qui valent 2 pieds 6 pouces; je poſe les 6 pouces, & je retiens les 2 pieds, qui, ajoutés avec les pieds, me donnent 15 pieds, qui valent 2 toiſes 3 pieds; je poſe les 3 pieds, & j'ajoute les 2 toiſes avec les toiſes: que je trouve monter à 85 toiſes, enſorte que la ſomme eſt 85 toiſes 3 pieds 6 pouces 5 lignes.

EXEMPLE III.

13lb	15℥	6℈	1ʒ	14gr.
26.	14.	7.	2.	23
34.	4.	5.	0.	20
54.	2.	7.	2.	18
32.	15.	3.	1.	19
162.	5.	7.	0.	22

Voyez la Table générale, à la fin de ce Traité.

Souſtraction des Nombres complexes.

111. Ecrivez les nombres propoſés, comme dans l'addition; commencez la ſouſtraction par les unités de l'eſpèce la plus baſſe. Si le nombre inférieur peut être retranché du nombre ſupérieur, écrivez le reſte au-deſſous; s'il ne peut en être retranché, empruntez ſur l'eſpèce immédiatement ſupérieure, une unité, que vous réduirez à l'eſpèce dont il s'agit, & que vous ajouterez au nombre dont vous ne pouvez retrancher. Faites la même choſe pour

chaque espèce ; & lorsque vous aurez été obligé d'emprunter, diminuez d'une unité le nombre sur lequel vous avez fait cet emprunt. Enfin, écrivez chaque reste à mesure que vous le trouverez, au-dessous du nombre qui l'a donné.

EXEMPLE I.

De.....	143#	17^{s}	6^{d}
on veut ôter.....	75.	12.	9
	68.	4.	9 reste.

Ne pouvant ôter 9 deniers de 6 deniers, j'emprunte 1 sous qui vaut 12 deniers, & 6 font 18, desquels ôtant 9, il reste 9 ; j'ôte ensuite 12 sous, non pas de 17 sous, mais de 16 qui restent après l'emprunt, & il reste 4 ; enfin je retranche 75 livres de 143 livres, & il me reste 68 livres.

EXEMPLE II.

De.....	163#	0^{s}	5^{d}
on veut ôter.....	84.	18.	9
	78.	1.	8 reste.

Comme je ne puis ôter 9 deniers de 5 deniers, & que d'ailleurs il n'y a pas de sous sur lesquels je puisse emprunter, j'emprunte une livre sur 163 livres ; mais j'en laisse, par la pensée, 19 sous à la place du zéro, après quoi j'opère comme ci-dessus.

Multiplication des Nombres complexes.

112. On peut réduire généralement la multiplication des nombres complexes, à la multiplication d'une fraction par une fraction ; multiplication dont nous avons donné la règle (97 & 98).

Par exemple, si on demande ce que doivent coûter 54^{t} 3^{pi} d'ouvrage, à raison de 42# 17^{s} 8^{d} la toise ; on peut réduire le multiplicande 42# 17^{s} 8^{d}, tout en deniers, ce qui donnera 10292 deniers, & comme le denier est la 240e partie de la livre, le multiplicande peut être représenté $\frac{10292}{240}$ de la livre ; pareillement on réduira le multiplicateur 54^{t} 3^{pi} tout en pieds, ce qui

donnera 327^{p}, & comme le pied eſt la ſixième partie de la toiſe, on aura pour multiplicateur $\frac{127}{6}$ de toiſe, enſorte que la queſtion eſt réduite à multiplier $\frac{10292}{240}$ de livre par $\frac{127}{6}$, ce qui (97) donnera $\frac{1306484}{1440}$ de livre, qui (104) valent $2337^{\#}\ 2^{s}\ 10^{d}$.

Cette méthode s'étend à toute eſpèce de nombres complexes, mais elle exige plus de calcul que celle que nous allons expoſer; c'eſt pourquoi nous ne nous y arrêterons pas davantage.

113. Un nombre qui eſt contenu exactement dans un autre, eſt dit *partie aliquote* de cet autre; ainſi 3 eſt partie aliquote de 12: il en eſt de même de 2, de 4 & de 6.

114. Rappellons-nous que multiplier n'étant autre choſe que prendre le multiplicande un certain nombre de fois; multiplier par $8\frac{3}{4}$, par exemple, c'eſt prendre le multiplicande 8 fois, & le prendre encore $\frac{3}{4}$ de fois, ou en prendre les $\frac{3}{4}$. Or on peut prendre ces $\frac{3}{4}$, ou en prenant d'abord le quart & l'écrivant 3 fois, ou bien en prenant d'abord la moitié, & enſuite la moitié de cette moitié.

Ainſi pour multiplier 84 par $8\frac{3}{4}$,
J'écrirois..... 84
$8\frac{3}{4}$
672
42
21
735 produit.

Et multipliant 84 par 8, j'aurois d'abord 672. Enſuite pour prendre les $\frac{3}{4}$ de 84, je prendrois d'abord la moitié qui eſt 42; puis pour prendre pour le quart reſtant, je prendrois la moitié de 42, qui eſt 21, & réuniſſant ces trois produits particuliers, j'aurois 735 pour le produit total.

115. Pour appliquer ceci aux nombres complexes, il faut remarquer que les différentes eſpèces d'unités au-deſſous de l'unité principale, ſont des

fractions les unes à l'égard des autres, & à l'égard de cette unité principale ; que par conſéquent, pour multiplier facilement par ces ſortes de nombres, il faut faire en ſorte de les décompoſer en parties aliquotes de l'unité principale, de manière que les parties aliquotes puiſſent être employées commodément, ou de les décompoſer en parties aliquotes les unes des autres ; & ſi cette décompoſition ne fournit que des parties aliquotes qui ne ſoient pas commodes dans le calcul, on y ſuppléera par de faux produits ; c'eſt ce que nous allons développer dans les exemples ſuivans.

EXEMPLE I.

On demande combien doivent coûter 54^{t} 3^{pi} à raiſon de 72 livres la toiſe.

Il faut multiplier.....	72^{liv}		
par.....	54^{t}	3^{pi}	
	288^{liv}	0^{s}	0^{d}
	360		
Pour 3 pieds.....	36		
	3924.	0.	0

On multipliera d'abord, ſelon les règles ordinaires, 72 livres par 54. Enſuite, pour multiplier par 3^{pi} qui ſont la moitié de la toiſe, & qui par conſéquent ne doivent donner que la moitié du prix de la toiſe ; on prendra la moitié de 72 livres, & additionnant, on aura 3924 livres pour le produit total.

EXEMPLE II.

Si on avoit.....	72^{liv}		
à multiplier par.....	54^{t}	5^{pi}	
	288^{liv}	0^{s}	0^{d}
	360		
Pour 3 pieds.....	36		
Pour 2 pieds.....	24		
	3948.	0.	0

On multipliera d'abord 72 livres par 54. Enſuite, au lieu de multiplier par $\frac{5}{6}$, parce que 5 pieds ſont les $\frac{5}{6}$ de la toiſe ; on décompoſera 5 pieds, en 3 pieds & 2 pieds, dont le premier

eſt

eſt la moitié, & le ſecond le $\frac{1}{3}$ de la toiſe ; on prendra donc d'abord la moitié de 72 livres, & enſuite le $\frac{1}{3}$ de 72 livres, & on aura, en réuniſſant tous ces produits particuliers, 3948 livres pour produit total.

EXEMPLE III.

Que l'on ait	72^{tt}		
à multiplier par.....	5^{t}	4^{pl}	8^{po}
	360^{tt}	0^{f}	0^{d}
Pour 3 pieds.....	36		
Pour 1 pied.....	12		
Pour 4 pouces.....	4		
Pour 4 pouces.....	4		
	416.	0.	0

Après avoir multiplié par 5 toiſes, on multipliera par 4 pieds ; & pour cet effet on décompoſera ce nombre en 3 pieds & un pied ; pour 3 pieds on prendra la moitié de 72 livres, qui eſt 36 livres, & pour 1 pied, on remarquera que c'eſt le $\frac{1}{3}$ de 3 pieds, & par conſéquent on prendra le $\frac{1}{3}$ de 36 livres, qui eſt 12 livres. Enſuite pour multiplier par 8 pouces, au lieu de comparer ces 8 pouces à la toiſe, on les comparera au pied, & on les décompoſera en 4 pouces & 4 pouces qui ſont chacun le $\frac{1}{3}$ du pied, & qui par conſéquent donneront chacun le $\frac{1}{3}$ de 12 livres. Enfin réuniſſant, on aura 416^{tt} 0^{f} 0^{d} pour produit.

116. Si le multiplicande eſt auſſi un nombre complexe, on ſe conduira comme il va être expliqué dans l'exemple ſuivant.

EXEMPLE IV.

Si l'on a.....	72^{tt}	6^{f}	6^{d}
à multiplier par.....	27^{t}	4^{pl}	8^{po}
	504^{tt}	0^{f}	0^{d}
	144		
Pour 5 ſous.....	6.	15.	0
Pour 1 ſou.....	1.	7.	0
Pour 6 deniers.....	0.	13.	6
Pour 3 pieds.....	36.	3.	3
Pour 1 pied.....	12.	1.	1
Pour 4 pouces.....	4.	0.	$4\frac{6}{11}$
Pour 4 pouces.....	4.	0.	$4\frac{6}{11}$
	2009.	0.	$6\frac{3}{11}$

On multipliera d'abord 72 livres par 27. Enſuite pour multiplier 6 ſous par 27, on décompoſera ces 6 ſous, en 5 ſous & 1 ſou. Les 5 ſous faiſant le quart de la livre, doivent, étant multipliés par 27, donner 27 fois le quart de la livre ou le quart de 27 livres; on prendra donc le quart de 27 livres, qui eſt 6^{liv} 15^{s}. Pour multiplier 1 ſou par 27, on remarquera que 1 ſou eſt la cinquième partie de 5 qu'on vient de multiplier; ainſi on prendra le cinquième des 6^{liv} 15^{s} qui ſera une livre 7 ſous: à l'égard des 6 deniers, on fera attention qu'ils ſont la moitié de 1 ſou, & par conſéquent on prendra la moitié d'une livre 7 ſous qu'on a eu pour un ſou.

Juſque-là tout le multiplicande eſt multiplié par 27.

Pour multiplier par 4 pieds, on s'y prendra de la même manière que dans l'exemple précédent; c'eſt-à-dire, que pour les 4 pieds, on prendra d'abord pour 3 pieds, la moitié 36^{liv} 3^{s} 3^{d} de multiplicande, & pour 1 pied, le tiers de ce que donnent les 3 pieds.

Enfin pour 8 pouces on prendra 2 fois pour 4; c'eſt-à-dire, qu'on écrira 2 fois le tiers de ce qu'on vient d'avoir pour 1 pied; en réuniſſant toutes ces différentes parties, on aura 2009^{liv} 0^{s} 6^{d} $\frac{1}{2}$ pour produit total.

117. Juſqu'ici les parties du multiplicande qu'il a fallu prendre, ont été aſſez faciles à évaluer; mais dans les cas où ces parties ſeroient plus compoſées, on ſe conduiroit comme dans l'exemple ſuivant.

EXEMPLE V.

A raiſon de..... 34^{liv} 10^{s} 2^{d} la toiſe,
Combien doivent coûter..... 17 toiſes ?

238^{liv}	0^{s}	0^{d}
34			
8.	10		
0.	17	0	
0.	2.	10.	
586.	12.	10.	

Après avoir multiplié 34 livres par 17, & enſuite les 10 ſous par 17, en prenant moitié de 17; on multipliera 2 deniers qui ſont la ſixième partie d'un ſou, & par conſéquent la ſixième partie de la dixième partie, ou la 60e partie de 10 ſous; mais au lieu de prendre la 60e partie de 8 livres 10 ſous, il ſera plus commode de faire un faux produit, & de prendre d'abord le

dixième de ce qu'ont donné 10 sous ; c'est-à-dire, le dixième de 8 livres 10 sous ; ce dixième qui est 0 livres 17 sous, est pour un sou ; mais comme il ne faut que pour le sixième d'un sou, on barrera ce faux produit, & on en écrira le sixième au-dessous.

EXEMPLE VI.

Combien pour 34^{tt} 10^{s} 2^{d} fera-t-on faire d'ouvrage à raison de une livre pour 17 toises ?

Il faut multiplier 17 toises par 34^{tt} 10^{s} 2^{d} ; c'est-à-dire, prendre 17 toises autant de fois qu'il y a d'unités dans 34^{tt} 10^{s} 2^{d}.

17 toises.				
34^{tt}	10^{s}	2^{d}		
68^{t}	0^{pd}	0^{po}	0^{l}	0^{pts}
51				
8.	3			
				4
4	4	2	2.	4
				4
0.	0.	10.	2.	4$\frac{2}{3}$
586.	3.	10.	2.	4$\frac{2}{3}$

Ainsi on multipliera d'abord 17 toises par 34 ; ensuite pour multiplier 17 toises par 10 sous, on prendra la moitié de 17 toises, parce que 10 sous font la moitié de la livre, & on aura 8 toises 3 pieds. Pour multiplier par 2 deniers, on cherchera, pour plus de facilité, ce que donneroit 1 sou, en prenant le dixième de ce qu'ont donné 10 sous ; ce dixième est 0^{t} 5^{pl} 1^{po} 2^{l} 4^{pts} & $\frac{8}{10}$ ou $\frac{4}{5}$ de point ; on le barrera comme ne devant pas faire partie du produit, mais on en prendra le sixième pour avoir le produit de 2 deniers, & on écrira au-dessous ce sixième, qui est 0^{t} 0$_{pl}$ 10^{po} 2^{l} 4^{pts} & $\frac{14}{10}$ ou $\frac{4}{5}$.

Nous avons donné cet exemple, principalement pour confirmer ce que nous avons dit (45), qu'il importoit de distinguer le multiplicande, du multiplicateur, lorsqu'ils sont tous les deux concrets : en effet, dans l'exemple précédent, ainsi que dans celui-ci les facteurs du produit sont également 17 toises & 34^{tt} 10^{s} 2^{d} ; cependant les deux produits sont différens.

Diviſion d'un nombre complexe par un nombre incomplexe.

118. Si le dividende ſeul eſt complexe, & ſi en même temps le dividende & le diviſeur ont des unités de différente eſpèce, on diviſera d'abord les unités principales du dividende, ſelon la règle ordinaire ; ce qui reſtera de cette diviſion, on le réduira (57) en unités de la ſeconde eſpèce, qu'on ajoutera avec celles de même eſpèce qui ſe trouveront dans le dividende, & on diviſera le tout comme à l'ordinaire : on réduira pareillement le reſte de cette diviſion en unités de la troiſième eſpèce, auxquelles on ajoutera celles de la même eſpèce qui ſe trouveront dans le dividende, & on diviſera le tout comme ci-deſſus ; on continuera de réduire les reſtes en unités de l'eſpèce ſuivante, tant qu'il s'en trouvera d'inférieures dans le dividende.

EXEMPLE I.

On a donné 4783^{tt} 3^{f} 9^{d} pour paiement de 87 toiſes d'ouvrage ; on demande à combien cela revient la toiſe ?

4783^{tt}	3^{f}	9^{d}	87			
433			54^{tt}	19^{f}	7^{d}	
85						
1703^{f}						
833						
50						
609^{d}						
000						

Il faut diviſer 4783^{tt} 3^{f} 9^{d} par 87, en commençant par les livres.

Les 4783 livres, diviſées par 87, ſelon la règle ordinaire, donneront 54 livres pour quotient, & 85 livres pour reſte : ces 85 livres réduites en ſous (57), donneront avec les 3 ſous du dividende 1703 ſous, qui diviſés par 87, donnent 19 pour

quotient, & 50 sous pour reste : ces 50 sous réduits en deniers, donnent, avec les 9 deniers du dividende, 609 deniers, lesquels divisés par 87, donnent enfin 7 deniers pour quotient.

EXEMPLE II.

On a touché 3376^{tt} 5^{s} 6^{d} pour paiement d'une autre somme sur laquelle on a retenu les 4 deniers pour livre. On demande quelle a dû être la valeur des 4 deniers pour livre ?

Les quatre deniers pour livre étant le $\frac{1}{60}$ de la somme principale inconnue ; la somme reçue est donc les $\frac{59}{60}$ de celle-ci, & par conséquent les 4 deniers pour livre sont la 59e partie de la somme reçue : il faut donc diviser 3376^{tt} 5^{s} 6^{d} par 59,

$$3376^{\text{tt}}\ 5^{\text{s}}\ 6_{\text{d}} \Big| \frac{59}{57^{\text{tt}}\ 4_{\text{s}}\ 6^{\text{d}}}$$

& l'on trouvera 57^{tt} 4^{s} 6^{d}, lesquels ajoutés à 3376 5^{s} 6^{d}, font connoître que la somme principale étoit de 3433^{tt} 10^{s}.

119. Mais si le dividende & le diviseur ont des unités de même espèce, il faut, avant de faire la division, examiner si le quotient doit être de même espèce qu'eux ; ce que l'état de la question décide toujours.

120. Dans le cas où le dividende & le diviseur étant de même espèce, le quotient devra aussi être de même espèce qu'eux, la division se fera précisément comme dans le cas précédent ; par exemple, si on proposoit cette question, 1243 livres ont produit un bénéfice de 7254 livres, à combien cela revient-il par livre ? Il est évident que le quotient doit avoir des unités de même espèce que le dividende & le diviseur ; c'est-à-dire, doit être des livres, & qu'on doit diviser 7254 livres par 1243, en réduisant, comme dans l'exemple précédent, le reste de cette division en sous, & le second reste en deniers, & on trouvera 5^{tt} 16^{s} 8^{d} $\frac{760}{1243}$, pour réponse à la question.

121. Mais lorſque le dividende & le diviſeur étant de même eſpèce, le quotient devra être d'eſpèce différente ; alors il faudra commencer par réduire (57) le dividende & le diviſeur, chacun à la plus petite eſpèce qui ſoit dans le dividende ; après quoi on fera la diviſion comme dans le cas précédent, & on y traitera les unités du dividende, comme ſi elles étoient de même eſpèce que celles que doit avoir le quotient.

Par exemple, ſi on propoſoit cette queſtion, combien pour 7954^{tt} 11^{l} 7^{d} fera-t-on faire d'ouvrage à raiſon de 72 livres la toiſe ? Il eſt clair, par la nature de la queſtion, que le quotient doit être des toiſes & parties de toiſe. On réduira donc 7954^{tt} 11^{l} 7^{d} tout en deniers, ce qui donnera 1909099 ; on réduira pareillement 72 livres en deniers, & on aura 17280, on diviſera 1909099 conſidéré comme des toiſes, par 17280, & on aura pour quotient 110^{t} 2^{pi} 10^{po} 6^{l} $\frac{12}{20}$.

Diviſion d'un nombre complexe par un nombre complexe.

122. Lorſque le diviſeur eſt auſſi un nombre complexe, il faut le réduire à ſa plus petite eſpèce (57), multiplier le dividende par le nombre qui exprime combien il faut de parties de la plus petite eſpèce du diviſeur pour compoſer l'unité principale de ce même diviſeur ; alors la diviſion ſera réduite au cas précédent où le diviſeur étoit incomplexe.

EXEMPLE.

57^{t} 5^{pi} 5^{po} d'ouvrage ont été payées 854^{tt} 17^{f} 11^{d} ; on demande à combien cela revient la toiſe ? Il faut diviſer 854^{tt} 17^{f} 11^{d} par 57^{t} 5^{pi} 5^{po} ; & pour cet effet je réduis les 57^{t} 5^{pi} 5^{po} en pouces, ce qui me donne 4169 pour nouveau diviſeur, & comme il faut 72^{po} pour faire la toiſe, qui eſt l'unité principale du diviſeur, je multiplie le dividende propoſé 854^{tt} 17^{f} 11^{d} par 72, ce qui me donne 61552^{tt} 10^{f} pour nouveau dividende, enſorte que je diviſe comme il ſuit.

854^{tt} 17^{s} 11^{d}	57^{t} 5^{pl} 5^{po}
72	
61552^{tt} 10^{s}	4169 pouc.
3186	14^{tt} 15^{s} $3^{d}\frac{1833}{4169}$
63730^{s}	
1195	
14340^{d}	
1833	

Les 61552 livres, diviſées par 4169 donnent 14 livres pour quotient, & 3186 pour reſte. Ces 3186 livres réduites en ſous, donnent avec les 10 ſous du dividende 63730 ſous, qui diviſés par 4169 donnent 15 ſous pour quotient, & 1195 de reſte. Ces 1195 ſous réduits en deniers, valent 14340 deniers, leſquels diviſés par 4169 donnent 3 deniers pour quotient, & 1833 deniers pour reſte; enſorte que le quotient eſt 14^{tt} 15^{s} $3^{d}\frac{1833}{4169}$ de denier.

Pour entendre la raiſon de cette règle, il faut faire attention que les 57^{t} 5^{pl} 5^{po} valant 4169 pouces, & le pouce étant la 72e partie de la toiſe, le diviſeur eſt $\frac{4169}{72}$ de la toiſe: or, pour diviſer par une fraction, il faut (101) renverſer la fraction diviſeur, & multiplier enſuite par cette fraction ainſi renverſée; il faut donc ici multiplier par $\frac{72}{4169}$; ce qui revient à multiplier d'abord par 72, & à diviſer enſuite par 4169, ainſi que le preſcrit la règle que nous donnons.

Comme la diviſion par un nombre complexe ſe réduit ainſi qu'on vient de le voir, à la diviſion par un nombre incomplexe, on doit avoir ici les mêmes attentions, à l'égard de la nature des unités que nous avons eues (118, 119 & 120).

Ce ſeroit ici le lieu de parler du toiſé ou de la multiplication & de la diviſion géométriques: ces opérations ne diffèrent en rien, pour le procédé, de celles que nous venons d'expoſer; en ſorte qu'il n'y auroit ici d'autre choſe à ajouter que d'expliquer quelle eſt la nature des unités des facteurs & du

produit, mais cela appartient à la Géométrie. Nous remettrons donc à en parler, jusqu'à ce que nous soyons arrivés à la Géométrie.

De la formation des Nombres quarrés & de l'extraction de leur racine.

123. On appelle *quarré* d'un nombre le produit qui résulte de la multiplication de ce nombre par lui-même; ainsi 25 est le quarré de 5, parce que 25 résulte de la multiplication de 5 par 5.

124. La *racine quarrée* d'un nombre proposé, est le nombre, qui multiplié par lui-même, reproduiroit ce même nombre proposé; ainsi 5 est la racine quarrée de 25; 7 est la racine quarrée de 49.

125. Un nombre que l'on quarre, est donc tout-à-la-fois multiplicande & multiplicateur; il est donc deux fois facteur (42) du produit; c'est pour cela qu'on appelle aussi ce produit ou quarré, la *seconde puissance* de ce nombre.

Il ne faut d'autre art pour quarrer un nombre, que de le multiplier par lui-même selon les règles ordinaires de la multiplication; mais pour extraire la racine quarrée d'un nombre; c'est-à-dire, pour revenir du quarré à la racine, il faut une méthode, du moins lorsque le nombre ou quarré proposé a plus de deux chiffres.

Lorsque le nombre proposé n'a qu'un ou deux chiffres, sa racine en nombre entier est quelqu'un des nombres.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

dont les quarrés sont

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Ainsi la racine quarrée de 72, par exemple, est 8 en nombres

entiers, parce que 72 étant entre 64 & 81, ſa racine eſt entre les racines de ceux-ci ; c'eſt-à-dire, entre 8 & 9, elle eſt 8 & une fraction, fraction qu'à la vérité on ne peut pas aſſigner exactement, mais dont on peut approcher continuellement, ainſi que nous le verrons dans peu.

126. La racine quarrée d'un nombre qui n'eſt point un quarré parfait, s'appelle un nombre *ſourd* ou *irrationnel* ou *incommenſurable.*

127. Venons aux nombres qui ont plus de deux chiffres.

C'eſt en obſervant ce qui ſe paſſe dans la formation du quarré, que nous trouverons la méthode qu'on doit ſuivre pour revenir à la racine.

Pour quarrer un nombre tel que 54, par exemple :

54
54
216
270
2916

Après avoir écrit le multiplicande & le multiplicateur, comme on le voit ici, nous multiplions, comme à l'ordinaire, le 4 ſupérieur par le 4 inférieur, ce qui fait évidemment le *quarré des unités.*

Nous multiplions enſuite le 5 ſupérieur, par le 4 inférieur, ce qui fait *le produit des dixaines par les unités.*

Nous paſſons, après cela, au ſecond chiffre du multiplicateur, & nous multiplions le 4 ſupérieur par le 5 inférieur, ce qui fait le produit des unités par les dixaines, ou (44) *le produit des dixaines par les unités.*

Enfin nous multiplions le 5 ſupérieur, par le 5 inférieur, ce qui fait *le quarré des dixaines.*

Nous ajoutons ces produits, & nous avons pour quarré, le nombre 2916, que nous voyons donc

être compoſé *du quarré des dixaines, plus deux fois le produit des dixaines par les unités, plus le quarré des unités* du nombre 54.

128. Ce que nous venons d'obſerver étant une conſéquence immédiate des règles de la multiplication, n'eſt pas plus particulier au nombre 54 qu'à tout autre nombre compoſé de dixaines & d'unités; en ſorte qu'on peut dire généralement que le quarré de tout nombre compoſé de dixaines & d'unités, renfermera les trois parties que nous venons d'énoncer, ſavoir; le quarré des dixaines de ce nombre, deux fois le produit des dixaines par les unités, & le quarré des unités.

129. Cela poſé, comme le quarré des dixaines eſt des centaines, (puiſque 10 fois 10 font 100); il eſt viſible que ce quarré des dixaines ne peut faire partie des deux derniers chiffres du quarré total.

Pareillement le produit du double des dixaines multipliées par les unités, ne pouvant être moindre que des dixaines, ne peut faire partie du dernier chiffre du quarré total.

Donc pour revenir du quarré 2916, à ſa racine, on peut raiſonner ainſi.

Exemple.

29. 16 | 54 racine.
41 .6
104
000

Commençons par trouver les dixaines de cette racine : or la formation du quarré nous apprend qu'il y a dans 2916, le quarré de ces dixaines, & que ce quarré ne peut faire partie des deux derniers chiffres; il eſt donc dans 29; & comme la racine

quarrée de 29 ne peut être plus de 5, concluons-en que le nombre des dixaines de la racine eſt 5, & portons-les à côté de 2916, comme on le voit ci-deſſus.

Je quarre 5, & je retranche le produit 25 de 29, il me reſte 4, à côté duquel j'abaiſſe les deux autres chiffres 16 du nombre propoſé 2916.

Pour trouver maintenant les unités de la racine, je fais attention à ce que renferme le reſte 416; il ne contient plus que deux parties du quarré, ſavoir, le double des dixaines de la racine multipliées par les unités, & le quarré des unités de cette même racine. De ces deux parties, la première ſuffit pour nous faire trouver les unités que nous cherchons; car puiſqu'elle eſt formée du double des dixaines multipliées par les unités, ſi on la diviſe par le double des dixaines que nous connoiſſons, elle doit (67) donner pour quotient les unités: il ne s'agit donc plus que de ſavoir dans quelle partie de 416 eſt renfermé ce double des dixaines multipliées par les unités: or nous avons remarqué ci-deſſus, qu'il ne pouvoit faire partie du dernier chiffre; il eſt donc dans 41: il faut donc diviſer 41 par le double 10 des dixaines trouvées; j'écris donc, ſous 41, le double 10 des dixaines, & faiſant la diviſion, le quotient 4 que je trouve eſt le nombre des unités, que je porte à la droite des 5 dixaines trouvées.

Mais il faut obſerver que quoique le quotient 4, que nous venons de trouver, ſoit en effet celui qui convient, cependant il peut arriver quelquefois que le quotient, trouvé de cette manière, ſoit plus fort qu'il ne convient; parce que 41 (c'eſt-à-dire la partie qui reſte après la ſéparation du dernier chiffre), renferme non-ſeulement le double des dixaines multiplié par les unités, mais encore les dixaines provenantes du quarré des unités; c'eſt pourquoi, pour

n'avoir aucun doute ſur le chiffre des unités, il faut employer la vérification ſuivante.

Après avoir trouvé le chiffre 4, des unités, & l'avoir écrit à la racine, je le porte à côté du double 10 des dixaines, ce qui fait 104, dont je multiplie ſucceſſivement tous les chiffres par le même nombre 4, & je retranche les produits ſucceſſifs, des parties correſpondantes de 416; comme il ne reſte rien, j'en conclus que la racine eſt en effet 54.

S'il reſtoit quelque choſe la racine n'en ſeroit pas moins la vraie racine en nombres entiers, à moins que ce reſte ne fût plus grand que le double de la racine, augmenté de l'unité; mais c'eſt ce qu'on n'a point à craindre quand on prend le quotient toujours au plus fort.

La vérification que nous venons d'enſeigner, eſt fondée ſur la formation même du quarré; car quand on multiplie 104 par 4, il eſt évident qu'on forme le quarré des unités & le double des dixaines multiplié par les unités; c'eſt-à-dire, ce qui complette le quarré parfait.

130. De ce que nous venons de dire, il faut conclure, que pour extraire la racine quarrée d'un nombre qui n'a pas plus de quatre chiffres, ni moins de trois, il faut, après en avoir ſéparé deux ſur la droite, chercher la racine quarrée de la tranche qui reſte à gauche; cette racine ſera le nombre des dixaines de la racine totale cherchée, & on l'écrira à côté du nombre propoſé, en l'en ſéparant par un trait.

On ſouſtraira de cette même tranche le quarré de la racine qu'on vient de trouver, & après avoir écrit le reſte au-deſſous de cette tranche, on abaiſſera à côté de ce reſte les deux chiffres qu'on avoit ſéparés.

On ſéparera par un point le chiffre des unités de la tranche qu'on vient d'abaiſſer, & on diviſera ce qui ſe trouvera ſur la gauche, par le double des dixaines, qu'on écrira au-deſſous.

On écrira le quotient à côté du premier chiffre de la racine, & on le portera enſuite à côté du double des dixaines qui a ſervi de diviſeur.

Enfin on multipliera par ce même quotient, tous les chiffres qui ſe trouveront ſur cette dernière ligne, & on retranchera leurs produits à meſure qu'on les trouvera, des chiffres qui leur correſpondent dans la ligne au-deſſus.

Achevons d'éclaircir ceci par un exemple.

EXEMPLE II.

On demande la racine quarré de 7569.

```
75.69 | 87 racine.
116.9
  167
-----
  000
```

Je ſépare les deux chiffres 69, & je cherche la racine quarrée de 75 ; elle eſt 8 ; j'écris 8 à côté : je quarre 8 & je retranche de 75 le quarré 64 ; il me reſte 11 que j'écris au-deſſous de 75, & j'abaiſſe à côté de ce même 11 les chiffres 69 que j'avois ſéparés.

Je ſépare dans 1169 le dernier chiffre 9, pour avoir dans 116 la partie que je dois diviſer pour trouver les unités.

Je forme mon diviſeur en doublant les 8 dixaines que j'ai trouvées, & j'écris ce diviſeur au-deſſous de 116 : la diviſion me donne pour quotient 7, que j'écris à la racine, à la droite de 8.

Je porte auſſi ce quotient à côté du diviſeur 16 ; je multiplie 167, qui forme la dernière ligne, par ce même quotient 7, & je retranche les produits à meſure que je les trouve, de 1169. il ne reſte rien : ce qui prouve que 7569 eſt un quarré parfait, & le quarré de 87.

131. Il faut bien remarquer qu'on ne doit diviſer par le double des dixaines, que la ſeule partie qui reſte à gauche après qu'on a ſéparé le dernier chiffre ;

en ſorte que ſi elle ne contenoit pas le double des dixaines, il ne faudroit pas pour cela employer le chiffre ſéparé : on mettroit 0 à la racine. Si au contraire on trouvoit que le double des dixaines y eſt plus de 9 fois, on ne mettroit cependant pas plus de 9 ; la raiſon en eſt la même que pour la diviſion (*page* 48).

132. Après avoir bien compris ce que nous venons de dire ſur la racine quarrée des nombres qui n'ont pas plus de 4 chiffres, on ſaiſira facilement ce qu'il convient de faire lorſque le nombre des chiffres eſt plus grand. De quelque nombre de chiffres que la racine doive être compoſée, on peut toujours la concevoir compoſée de deux parties, dont l'une ſoit des dixaines & l'autre des unités, par exemple, 874 peut être conſidéré comme repréſentant 87 dixaines & 4 unités.

Cela poſé, quand on a trouvé les deux premiers chiffres de la racine, par la méthode qu'on vient d'expoſer ; on peut auſſi trouver le troiſième par la même méthode, en conſidérant ces deux premiers chiffres comme ne faiſant qu'un ſeul nombre de dixaines, & leur appliquant, pour trouver le troiſième, tout ce qui a été dit du premier pour trouver le ſecond.

Pareillement, quand on aura trouvé les trois premiers chiffres, s'il doit y en avoir un quatrième, on conſidérera les trois premiers comme ne faiſant qu'un ſeul nombre de dixaines, auquel on appliquera, pour trouver le quatrième, le même raiſonnement qu'on appliquoit aux deux premiers, pour trouver le troiſième, & ainſi de ſuite.

Mais pour procéder avec ordre, il faut commencer par partager le nombre propoſé en tranches, de deux chiffres chacune, en allant de droite à

gauche ; la dernière pourra n'en contenir qu'un.

La raiſon de cette préparation eſt fondée ſur ce que, conſidérant la racine comme compoſée de dixaines & d'unités, il faut, ſuivant ce qui a été dit ci-deſſus (129 *& ſuiv.*), commencer par ſéparer les deux derniers chiffres ſur la droite, pour avoir dans la partie qui reſte à gauche, le quarré des dixaines : mais comme cette partie eſt elle même compoſée de plus de deux chiffres, un raiſonnement ſemblable conduit à en ſéparer encore deux ſur la droite, & ainſi de ſuite.

Donnons un exemple de cette opération.

EXEMPLE III.

On demande la racine quarrée de 76807696.

76.80.76.96 | 8764
128.0
167
1117.6
1746
7009.6
17524
00000

Après avoir partagé le nombre propoſé, en tranches de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche, je cherche quelle eſt la racine quarrée de la tranche 76, qui eſt le plus à gauche : je trouve qu'elle eſt 8, & j'écris 8 à côté du nombre propoſé : je quarre 8 & je retranche le quarré 64, de 76 ; j'ai pour reſte 12 que j'écris au-deſſous de 76 ; à côté de ce reſte j'abaiſſe la tranche 80, dont je ſépare le dernier chiffre par un point, & au-deſſous de la partie 128, j'écris 16 double de la racine trouvée ; puis diſant, en 128, combien de fois 16 ? Je trouve qu'il y eſt 7 fois ; j'écris 7 à la ſuite de la racine 8, & à côté du double 16 ; je multiplie 167 par ce même nombre 7, & je retranche de 1280 le produit de cette multiplication ; il me reſte 111 à côté duquel j'abaiſſe la tranche 76, ce qui forme 11176 ; je ſépare le dernier chiffre 6 de ce nombre, & ſous la partie 1117 qui reſte à gauche, j'écris 174 double de la racine 87 ; je diviſe 1117 par 174, & ayant trouvé 6 pour quotient,

j'écris 6 à la racine & à côté du double 174 : je multiplie 1746 par ce même nombre 6, & je retranche de 11176, il reſte 700 ; à côté de ce reſte j'abaiſſe 96, dont je ſépare le dernier chiffre ; au-deſſous de 7009, qui reſte à gauche, j'écris 1752 double de la racine trouvée 876, & diviſant 7009 par 1752, je trouve pour quotient 4, que j'écris à la racine & à côté du double 1752. Je multiplie 17524 par ce même nombre 4, & je retranche de 70096, il ne reſte rien ; ainſi la racine quarrée de 76807696 eſt exactement 8764.

133. Lorſque le nombre propoſé n'eſt point un quarré parfait, il y a un reſte à la fin de l'opération, & la racine quarrée qu'on a trouvée, eſt la racine quarrée du plus grand quarré, contenu dans le nombre propoſé ; alors il n'eſt pas poſſible d'extraire la racine quarrée exactement ; mais on peut en approcher ſi près qu'on le juge à propos ; c'eſt-à-dire, de manière que l'erreur qui en réſulteroit dans le quarré ſoit au-deſſous de telle quantité qu'on voudra.

Cette approximation ſe fait commodément par le moyen des décimales. Il faut concevoir à la ſuite du nombre propoſé, deux fois autant de zéros qu'on voudra avoir de décimales à la racine ; faire l'opération comme à l'ordinaire, & ſéparer enſuite par une virgule ſur la droite de la racine, moitié autant de décimales qu'on a mis de zéros à la ſuite du nombre propoſé. En effet, ſi on a mis 4 zéros, par exemple, on a rendu le quarré 10000 fois trop grand ; la racine qu'on trouve eſt donc 100 fois trop grande, puiſque 10000 eſt le quarré de 100 ; ſi on a mis 6 zéros, on a rendu le quarré 1000000 fois trop grand, & par conſéquent la racine qu'on trouve eſt 1000 fois trop grande, puiſque 1000000 eſt le quarré de 1000 ; mais en ſéparant deux chiffres ſur la droite dans le premier cas, & trois dans le ſecond, on la ramène à ce qu'elle doit être (28).

EXEMPLE

EXEMPLE.

On demande la racine quarrée de 87567 à moins d'un millième près.

Pour faire des millièmes, il faut trois décimales; il faut donc mettre 6 zéros au quarré 87567; ainsi il faut tirer la racine quarrée de 87567000000.

```
8.75.67.00.00.00 | 295917
47.5
  49
-------
 346.7
   585
-------
 5420.0
  5909
-------
 10190.0
   59181
---------
 427190.0
  591827
---------
  129111
```

En faisant l'opération comme dans les exemples précédens, on trouve pour racine quarrée, à moins d'une unité près, le nombre 295917; mais comme cette racine est celle de 87567000000 qui est 1000000 fois plus grand que 87567, dont on demande la racine; il faut rendre cette racine trouvée 295917, mille fois plus petite; c'est-à-dire, en séparer trois chiffres sur la droite, & 295,917 sera la racine quarrée de 87567, à moins d'un millième près.

Pareillement, si on demande la racine quarrée de 2, à moins d'un dix-millième près; on tirera la racine quarrée de 200000000 qu'on trouvera être 14142; séparant les quatre chiffres de la droite par une virgule, on aura 1,4142 pour racine quarrée de 2, approchée à moins d'un dix-millième près.

134. On a vu (97) que pour multiplier une fraction par une fraction, il falloit multiplier numérateur par numérateur, & dénominateur par dénominateur; par conséquent, pour quarrer une fraction, il faut quarrer le numérateur & le dénominateur.

Ainsi le quarré de $\frac{3}{7}$ est $\frac{9}{49}$, celui de $\frac{4}{5}$ est $\frac{16}{25}$.

135. Donc, réciproquement, pour tirer la racine quarrée d'une fraction, il faut tirer la racine quarrée du numérateur & celle du dénominateur.

Ainſi la racine quarrée de $\frac{9}{16}$ eſt $\frac{3}{4}$, parce que celle de 9 eſt 3, & celle de 16 eſt 4.

136. Mais il peut arriver que le numérateur ou le dénominateur, ou tous les deux, ne ſoient point des quarrés parfaits; s'il n'y a que le numérateur qui ne ſoit point un quarré, on en tirera la racine approchée par la méthode qu'on vient d'expoſer, & ayant tiré la racine du dénominateur, on la donnera pour dénominateur à la racine du numérateur.

Ainſi ſi on demande la racine de $\frac{2}{9}$, on tirera la racine approchée du numérateur 2, qu'on trouvera 1,4 ou 1,41, ou 1,414, ou 1,4142, &c. ſelon qu'on voudra en approcher plus ou moins; & comme la racine quarrée de 9 eſt 3, on aura pour racine approchée de $\frac{2}{9}$, la quantité $\frac{1,4}{3}$ ou $\frac{1,41}{3}$ ou $\frac{1,414}{3}$ ou $\frac{1,4142}{3}$ &c.

Mais ſi le dénominateur n'eſt pas un quarré, on multipliera les deux termes de la fraction par ce même dénominateur, ce qui ne changera rien à la valeur de la fraction, & rendra ce dénominateur quarré; alors on opérera comme dans le cas précédent.

Par exemple, ſi on demande la racine quarrée de $\frac{3}{5}$, on changera cette fraction en $\frac{15}{25}$; tirant la racine quarrée de 15, juſqu'à 3 décimales, par exemple, on aura 3,872; & comme la racine quarrée de 25 eſt 5, la racine quarrée de $\frac{15}{25}$ ſera $\frac{3,872}{5}$.

Pour ne pas avoir pluſieurs ſortes de fractions à la fois, on réduira le réſultat $\frac{3,872}{5}$ uniquement en décimales, en diviſant 3,872 par 5, ce qui donnera 0,774 pour la racine de $\frac{3}{5}$ exprimée purement en décimales (92).

137. Enfin ſi on avoit des entiers joints à des fractions, on réduiroit ces entiers en fractions (80),

& on opéreroit, comme il vient d'être dit, pour une fraction.

Ainſi, pour tirer la racine quarrée de $8\frac{3}{7}$, on changeroit $8\frac{3}{7}$ en $\frac{59}{7}$, & celle-ci (136) en $\frac{413}{49}$, dont on trouveroit que la racine approchée eſt $\frac{20,322}{7}$ ou 2,903.

138. On peut auſſi réduire en décimales la fraction qui accompagne l'entier, mais il faut obſerver d'y employer un nombre de décimales, pair & double de celui qu'on veut avoir à la racine, parce que le produit de la multiplication de deux nombres, qui ont des décimales, devant avoir autant de décimales qu'il y en a dans les deux facteurs (54), le quarré d'un nombre qui a des décimales, doit en avoir deux fois autant que ce nombre.

En appliquant cette méthode à $8\frac{3}{7}$, on le transforme (92) en 8,428571, dont la racine eſt 2,903, comme ci-deſſus.

139. Si on a à tirer la racine quarrée d'une quantité décimale, il faut avoir ſoin de rendre le nombre des décimales pair, s'il ne l'eſt pas, & cela par la même raiſon qui vient d'être dite (138); on y parviendra en mettant à la ſuite de ſes décimales 1 ou 3, ou 5, &c. zéros, cela n'en change pas la valeur (29).

Ainſi, pour tirer la racine quarrée de 21,935, à moins d'un millième près, je tire la racine quarrée de 21,935000 qui eſt 4,683; c'eſt auſſi celle de 21,935. On trouvera de même que celle de 0,542 eſt à moins d'un millième près, 0,736, & que celle de 0,0054 eſt à moins d'un millième près 0,073.

De la formation des Nombres cubes, & de l'extraction de leur Racine.

140. Pour former ce qu'on appelle *le cube* d'un nombre, il faut d'abord multiplier ce nombre par

lui-même, & multiplier enſuite, par ce même nombre, le produit réſultant de cette première multiplication.

Ainſi le cube d'un nombre eſt, à proprement parler, le produit du quarré d'un nombre, multiplié par ce même nombre : 27 eſt le cube de 3, parce qu'il réſulte de la multiplication de 9 (quarré de 3) par le même nombre 3.

Le nombre que l'on cube eſt donc trois fois facteur dans le cube; c'eſt pour cette raiſon que le cube eſt auſſi nommé *troiſième puiſſance* ou *troiſième degré* de ce nombre.

141. En général, on dit qu'un nombre eſt élevé à ſa ſeconde, troiſième, quatrième, cinquième, &c. puiſſance, quand on l'a multiplié par lui-même, 1, 2, 3, 4, &c. fois conſécutives, ou lorſqu'il eſt 2 fois, 3 fois, 4 fois, 5 fois, &c. facteur dans le produit.

142. La *racine cubique* d'un cube propoſé, eſt le nombre, qui, multiplié par ſon quarré, produit ce cube; ainſi 3 eſt la racine cubique de 27.

143. On n'a donc pas beſoin de règles pour former le cube d'un nombre; mais pour revenir du cube à ſa racine, il faut une méthode. Nous déduirons cette méthode de l'examen de ce qui ſe paſſe dans la formation du cube.

Obſervons cependant qu'on n'a beſoin de méthode pour extraire la racine cubique en nombres entiers, que lorſque le nombre propoſé a moins de quatre chiffres; car 1000 étant le cube de 10, tout nombre au-deſſous de 1000, & par conſéquent de moins de quatre chiffres, aura pour racine moins que 10; c'eſt-à-dire, moins de deux chiffres.

Ainſi tout nombre qui tombera entre deux de ceux-ci,

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729,

aura ſa racine cubique en nombre entier, entre les deux nombres correſpondans de cette ſuite.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, dont la première contient les cubes.

144. On ne peut pas toujours aſſigner exactement en nombres la racine cubique de tout nombre propoſé; mais on peut approcher continuellement d'un nombre, qui, étant cubé, approche auſſi de plus en plus de reproduire ce premier nombre; c'eſt ce que nous verrons après avoir appris à trouver la racine d'un cube parfait.

145. Voyons pour cet effet de quelles parties peut être compoſé le cube d'un nombre qui contiendroit des dixaines & des unités.

Puiſque le cube réſulte du quarré d'un nombre multiplié par ce même nombre, il eſt eſſentiel de ſe rappeller ici (127) que *le quarré d'un nombre compoſé de dixaines & d'unités, renferme, 1°. le quarré des dixaines; 2°. deux fois le produit des dixaines par les unités; 3°. le quarré des unités.*

Pour former le cube, il faut donc multiplier ces trois parties par les dixaines & par les unités du même nombre.

Afin d'appercevoir plus diſtinctement les produits qui en réſulteront, donnons à cette opération ſimulée la forme ſuivante:

1°.

64 Le quarré des dixaines. 96 Deux fois le produit des dixaines par les unités. 36 Le quarré des unités. } étant multiplié par les dixaines, donnera { Le cube des dixaines. 64 Deux fois le produit du quarré des dixaines multiplié par les unités. 96 Le produit des dixaines par le quarré des unités. 36

2°.

Le quarré des dixaines.	étant multiplié par les unités, donnera	Le produit du quarré des dixaines multiplié par les unités.
Deux fois le produit des dixaines par les unités.		Deux fois le produit des dixaines par le quarré des unités.
Le quarré des unités		Le cube des unités.

Donc en raſſemblant ces 6 réſultats, & réuniſſant ceux qui ſont ſemblables, on voit que le cube d'un nombre compoſé de dixaines & d'unités, comtient quatre parties; ſavoir, *le cube des dixaines, trois fois le quarré des dixaines multiplié par les unités, trois fois les dixaines multipliées par le quarré des unités, & enfin le cube des unités.*

Formons d'après cela le cube d'un nombre compoſé de dixaines & d'unités, de 43, par exemple,

64000
14400
1080
27
79507

Nous prendrons donc le cube de 4 qui eſt 64; mais comme ce 4 eſt des dixaines, ſon cube ſera des mille, parce que le cube de 10 eſt 1000; ainſi le cube des 4 dixaines ſera 64000.

3 fois 16 ou 3 fois le quarré des 4 dixaines, étant multiplié par les 3 unités, donnera 144 centaines, parce que le quarré de 10 eſt 100; ainſi ce produit ſera 14400.

3 fois 4 ou 3 fois les dixaines, étant multipliées par le quarré 9 des unités, donneront des dixaines, & ce produit ſera 1080.

Enfin le cube des unités ſe terminera à la place des unités, & ſera 27.

En réuniſſant ces quatre parties, on aura 79507 pour le cube de 43, cube qu'on auroit ſans doute trouvé plus facilement, en multipliant 43 par 43, & le produit 1849 encore par 43; mais il ne s'agit pas tant ici de trouver la valeur du cube, que de reconnoître, par l'examen des parties qui le compoſent, la manière de revenir à ſa racine.

146. Cela poſé, voici le procédé de l'extraction de la racine cubique.

EXEMPLE.

Soit donc proposé d'extraire la racine cubique de 79507,

Cube.	*Racine.*
79.507	43
155.07	
48	

Pour avoir la partie de ce nombre qui renferme le cube des dixaines de la racine, j'en sépare les trois derniers chiffres, dans lesquels nous venons de voir que ce cube ne peut être compris, puisqu'il vaut des milles.

Je cherche la racine cubique de 79, elle est 4 que j'écris à côté.

Je cube 4, & j'ôte le produit 64, de 79, il me reste 15 que j'écris au-dessous de 79.

A côté de 15, j'abaisse 507, ce qui me donne 15507, dans lequel il doit y avoir 3 fois le quarré des quatre dixaines trouvées, multipliées par les unités que nous cherchons; plus, 3 fois ces mêmes dixaines multipliées par le quarré des unités; plus enfin le cube des unités.

Je sépare les deux derniers chiffres 07; la partie 155 qui reste à gauche, renferme 3 fois le quarré des dixaines, multiplié par les unités; c'est pourquoi, afin d'avoir les unités (67), je vais diviser cette partie 155, par le triple du quarré des 4 dixaines; c'est-à-dire, par 48.

Je trouve que 48 est 3 fois dans 155; j'écris donc 3 à la racine.

Pour éprouver cette racine, & connoître le reste, s'il y en a, nous pourrions composer les trois parties du cube qui doivent se trouver dans 15507, & voir si elles forment 15507, ou de combien elles en diffèrent; mais il est aussi commode de faire cette

vérification, en cubant tout de suite 43 ; c'est-à-dire, en multipliant 43 par 43, ce qui produit 1849, & multipliant ce produit par 43, ce qui donne enfin 79507. Ainsi 43 est exactement la racine cubique.

Si le nombre proposé a plus de six chiffres, on raisonnera comme dans l'exemple ci-après.

EXEMPLE II.

Soit proposé d'extraire la racine cubique de 596947688.

596.947.688 | 842
849.47
192
792704

42436.88
21168
596947688

000000000

On considérera sa racine comme composée de dixaines & d'unités, & par cette raison on commencera par séparer les trois derniers chiffres.

La partie 596947 qui renferme le cube des dixaines, ayant plus de trois chiffres, sa racine en aura plus d'un, & par conséquent elle aura des dixaines & des unités : il faut donc pour trouver le cube de ces premières dixaines, séparer les trois chiffres 947.

Cela posé, je cherche la racine cubique de 596 ; elle est 8, j'écris ce 8 à côté.

Je cube 8, & je retranche le produit 512 de 596 ; il reste 84 que j'écris au-dessous de 596.

A côté de 84, j'abaisse 947, ce qui me donne 84947, dont je sépare les deux derniers chiffres.

Au-dessous de la partie 849, j'écris 192 qui est le triple quarré de la racine 8, & je divise 849 par 192 ; je trouve pour quotient 4, que j'écris à la racine.

Pour vérifier cette racine, & avoir en même-temps le reste, je cube 84, & je retranche le produit 592704, du nombre 596947 ; j'ai pour reste 4243.

A côté de ce reste, j'abaisse la tranche 688, & considérant la racine 84 comme un seul nombre qui marque les dixaines de la

racine cherchée, je ſépare les deux derniers chiffres 88 de la tranche abaiſſée, & je diviſe la partie 42436 par le triple quarré de 84, c'eſt-à-dire, par 21168, je trouve pour quotient 2, que j'écris à la ſuite de 84.

Pour vérifier la racine 842, & avoir le reſte, s'il y en a, je cube 842; & je retranche le produit 596947688, du nombre propoſé 596947688; & comme il ne reſte rien, j'en conclus que 842 eſt la racine exacte de 596947688.

Il faut encore obſerver, 1°. que dans le cours de ces opérations, on ne doit jamais mettre plus de 9 à la racine.

2°. Si le chiffre qu'on porte à la racine étoit trop fort, on s'en appercevroit à ce que la ſouſtraction ne pourroit ſe faire, & alors on diminueroit la racine ſucceſſivement d'une, 2, 3, &c. unités, juſqu'à ce que la ſouſtraction devînt poſſible.

147. Lorſque le nombre propoſé n'eſt pas un cube parfait, la racine qu'on trouve n'eſt qu'une racine approchée, & il eſt rare qu'il ſoit ſuffiſant de l'avoir en nombres entiers. Les décimales ſont encore d'un uſage très-avantageux pour pouſſer cette approximation beaucoup plus loin, & auſſi loin qu'on le deſire, ſans que cependant on puiſſe jamais atteindre à une racine exacte.

Pour approcher auſſi près qu'on le voudra de la racine cubique d'un cube imparfait, il faut mettre à la ſuite de ce nombre trois fois autant de zéros qu'on veut avoir de décimales à la racine; faire l'extraction comme dans les exemples précédens, & après l'opération faite, ſéparer par une virgule ſur la droite de la racine, autant de chiffres qu'on vouloit avoir de décimales.

EXEMPLE.

On demande d'approcher de la racine cubique de 8755 juſqu'à moins d'un centième près. Pour avoir des centièmes à la racine,

il faut deux décimales ; il faut donc mettre ſix zéros à la ſuite de 8755.

Ainſi la queſtion ſe réduit à tirer la racine cubique de 8755000000.

8.755.000.000 | 2061

07.55
12
8000

7550.00
1200
8741816

131840.00
127308
8754552981

447019

Suivant ce qui a été dit ci-deſſus, je partage ce nombre, en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche.

Je tire la racine cubique de la derniere tranche 8 ; elle eſt 2 que j'écris à la racine. Je cube 2 & je retranche le produit de 8 ; j'ai pour reſte 0, à côté duquel j'abaiſſe la tranche 755, dont je ſépare les deux derniers chiffres 55 : au-deſſous de la partie reſtante 7, j'écris 12, triple quarré de la racine, & diviſant 7 par 12, je trouve 0 pour quotient que j'écris à la racine.

Je cube la racine 20, ce qui me donne 8000 que je retranche de 8755 ; j'ai pour reſte 755, à côté duquel j'abaiſſe la tranche 000, dont je ſépare deux chiffres ſur la droite ; au-deſſous de la partie reſtante 7550, j'écris 1200 triplé quarré de la racine 20, & diviſant 7550 par 1200, je trouve pour quotient 6 que j'écris à la racine.

Je cube la racine 206, & je retranche le produit de 8755000 ; j'ai pour reſte 13184, à côté duquel j'abaiſſe la dernière tranche 000, dont je ſépare les deux derniers chiffres. Au-deſſous de la partie reſtante 131840, j'écris 127308 triple quarré de la racine trouvée 206. Je diviſe 131840 par 127308 ; je trouve pour quotient 1 que j'écris à la ſuite de 206. Je cube 2061, & ayant retranché de 8755000000 le produit 8754552981 ; j'ai pour reſte 447019.

La racine cubique approchée 8755000000 eſt donc 2061 ; mais comme 8755000000 eſt 1000000 fois plus grand que 8755, ſa racine eſt 100 fois plus grande que celle de 8755, puiſque 1000000 eſt le cube de 100 ; donc la racine cubique de 8755 eſt 20,61.

Si on vouloit pouſſer l'approximation plus loin, on mettroit à la ſuite du reſte trois zéros, & on continueroit comme on a fait à chaque fois qu'on a abaiſſé une tranche.

148. Puiſque, pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier numérateur par numérateur, & dénominateur par dénominateur; il faudra donc, pour cuber une fraction, cuber ſon numérateur & ſon dénominateur. Donc, réciproquement, pour extraire la racine cubique d'une fraction, il faudra extraire la racine cubique du numérateur, & la racine cubique du dénominateur. Ainſi la racine cubique de $\frac{27}{64}$ eſt $\frac{3}{4}$, parce que la racine cubique de 27 eſt 3, & celle de 64 eſt 4.

149. Mais ſi le dénominateur ſeul eſt un cube, on tirera la racine approchée du numérateur, & on donnera à cette racine pour dénominateur la racine cubique du dénominateur.

Par exemple, ſi on demande la racine cubique de $\frac{143}{343}$; comme le numérateur n'eſt pas un cube, j'en tire la racine approchée, qui ſera 5,22, à moins d'un centième près, & tirant la racine de 343 qui eſt 7, j'ai $\frac{5,22}{7}$ pour la racine approchée de $\frac{143}{343}$, ou bien, en réduiſant en décimales (92), j'ai 0,74 pour cette racine approchée à moins d'un centième près.

150. Si le dénominateur n'eſt pas un cube, on multipliera les deux termes de la fraction par le quarré de ce dénominateur, & alors le nouveau dénominateur étant un cube, on ſe conduira comme il vient d'être dit.

Par exemple, ſi on demande la racine cubique de $\frac{1}{7}$, je multiplie le numérateur & le dénominateur par 49, quarré du dénominateur; j'ai $\frac{147}{343}$ qui eſt de même valeur que $\frac{1}{7}$. La racine cubique de $\frac{147}{343}$ eſt $\frac{5,27}{7}$ ou en réduiſant purement en décimale

0,75 ; la racine cubique de $\frac{1}{7}$ eſt donc 0,75, à moins d'un centième près.

S'il y avoit des entiers joints aux fractions, on convertiroit le tout en fraction, & la queſtion ſeroit réduite à tirer la racine cubique d'une fraction (148 & *ſuiv.*)

On pourroit auſſi, ſoit qu'il y ait des entiers, ſoit qu'il n'y en ait point, réduire la fraction en décimales, mais il faut avoir ſoin de pouſſer cette réduction juſqu'à trois fois autant de décimales qu'on veut en avoir à la racine.

Ainſi, ſi on demandoit la racine cubique de $7\frac{1}{11}$, approchée juſqu'à moins d'un millième, on changeroit la fraction $\frac{1}{11}$ en 0,272727272, enſorte que, pour avoir la racine cubique de $7\frac{1}{11}$, on tireroit celle de 7,272727272, qu'on trouvera être 1,937.

151. Pour tirer la racine cubique d'un nombre qui aura des décimales, il faudra le préparer par un nombre ſuffiſant de zéros mis à ſa ſuite, de manière que le nombre de ſes décimales ſoit ou 3 ou 6, ou 9, &c. alors on en tirera la racine comme s'il n'y avoit pas de virgule ; & après l'opération faite, on ſéparera ſur la droite de la racine, par une virgule, un nombre de chiffres qui ſoit le tiers du nombre des décimales de la quantité propoſée ; enſorte que ſi la racine n'avoit pas ſuffiſamment de chiffres pour que cette règle eût ſon exécution, on y ſuppléeroit par des zéros placés ſur la gauche de cette racine.

Ainſi pour tirer la racine cubique de 6,54, à moins d'un millième près, je mettrai 7 zéros, & je tirerai la racine cubique de 6540000000 qui ſera 1870, j'en ſéparerai 3 chiffres, puiſqu'il y a 9 décimales au cube, & j'aurai 1,870, ou ſimplement 1,87 pour la racine cubique de 6,54. On trouvera de même que la racine cubique de 0,0052 eſt 0,1732, à moins d'un dix-millième près.

Des Raiſons, Proportions & Progreſſions; & de quelques Règles qui en dépendent.

152. Les mots *raiſon* & *rapport* ont la même ſignification en Mathématiques, & l'un & l'autre expriment *le réſultat de la comparaiſon de deux quantités.*

153. Si dans la comparaiſon de deux quantités, on a pour but de connoître de combien l'une ſurpaſſe l'autre, ou en eſt ſurpaſſée, le réſultat de cette comparaiſon, qui eſt la différence de ces deux quantités, ſe nomme leur *Rapport Arithmétique.*

Ainſi, ſi je compare 15 avec 8, pour connoître leur différence 7, ce nombre 7 qui eſt le réſultat de la comparaiſon, eſt le rapport arithmétique de 15 à 8.

Pour marquer que l'on compare deux quantités ſous ce point de vue, on ſépare l'une de l'autre par un point; enſorte que 15.8 marque que l'on conſidère le rapport arithmétique de 15 à 8.

154. Si dans la comparaiſon de deux quantités, on ſe propoſe de connoître combien l'une contient l'autre, ou eſt contenue en elle, le réſultat de cette comparaiſon ſe nomme leur *Rapport Géométrique.*

Par exemple, ſi je compare 12 à 3, pour ſavoir combien de fois 12 contient 3, le nombre 4 qui exprime ce nombre de fois, eſt le rapport géométrique de 12 à 3.

Pour marquer que l'on compare deux quantités ſous ce point de vue, on ſépare l'une de l'autre par deux points.

Cette expreſſion 12:3 marque qu'on conſidère le rapport géométrique de 12 à 3.

155. Des deux quantités que l'on compare, celle qu'on énonce ou qu'on écrit la première, ſe nomme *antécédent*, & la ſeconde ſe nomme *conſéquent*.

Ainſi, dans le rapport 12:3, 12 eſt l'antécédent, & 3 eſt le conſéquent; & l'un & l'autre s'appellent les *termes* du rapport.

156. Pour avoir le rapport arithmétique de deux quantités, il n'y a donc autre choſe à faire qu'à retrancher la plus petite de la plus grande.

157. Et pour avoir le rapport géométrique de deux quantités, il faut diviſer l'une par l'autre.

158. Nous évaluerons ce rapport dorénavant, en diviſant l'antécédent par le conſéquent; ainſi le rapport de 12 à 3 eſt 4, & le rapport de 3 à 12 eſt $\frac{1}{12}$ ou $\frac{1}{4}$.

159. Un rapport arithmétique ne change point quand on ajoute à chacun de ſes deux termes, ou qu'on en retranche une même quantité, parce que la différence (en quoi conſiſte le rapport) reſte toujours la même.

160. Un rapport géométrique ne change point quand on multiplie ou quand on diviſe ſes deux termes par un même nombre; car le rapport géométrique conſiſtant (157) dans le quotient de la diviſion de l'antécédent par le conſéquent, eſt une quantité fractionnaire qui ne peut changer par la multiplication ou la diviſion de ſes deux termes par un même nombre. Ainſi le rapport 3 : 12 eſt le même que celui 6 : 24 que l'on a en multipliant les deux termes du premier par 2, le même que celui de 1 : 4 que l'on a en diviſant par 3.

161. Cette propriété ſert à ſimplifier les rapports.

Par exemple, si j'avois à examiner le rapport des longueurs de deux pièces d'artillerie, dont l'une seroit de 3 pieds $\frac{2}{3}$, & l'autre de 4 pieds $\frac{1}{4}$; je dirois, en réduisant tout en fraction, ce rapport est le même que celui de $\frac{11}{3}$ à $\frac{17}{4}$, ou (en réduisant au même dénominateur), le même que celui de $\frac{44}{12}$ à $\frac{51}{12}$, ou enfin, en supprimant le dénominateur 12, (ce qui revient au même que de multiplier les deux termes du rapport par 12), est le même que celui de 44 à 51.

162. Lorsque quatre quantités sont telles que le rapport des deux premières, est le même que le rapport des deux dernières, on dit que ces quatre quantités forment une *proportion*, & cette proportion est arithmétique ou géométrique, selon que le rapport qu'on y considère est arithmétique ou géométrique.

Les quatre quantités 7, 9, 12, 14, forment une proportion arithmétique, parce que la différence des deux premières est la même que celle des deux dernières.

Pour marquer que quatre quantités sont en proportion arithmétique, on les écrit ainsi, 7 . 9 : 12 . 14, c'est-à-dire, qu'on sépare par un point, les deux termes de chaque rapport; & les deux rapports, par deux points. Le point qui sépare les deux termes de chaque rapport, signifie *est à*; & les deux points qui séparent les deux rapports, signifient *comme*; ensorte que pour énoncer la proportion ainsi écrite, on dit 7 *est à* 9, *comme* 12 *est à* 14.

Les quatre quantités 3, 15, 4, 20, forment une proportion géométrique, parce que 3 est contenu dans 15, comme 4 l'est dans 20.

Pour marquer qu'elles sont en proportion géo-

métrique ; on les écrit ainſi 3 : 15 : : 4 : 20 ; c'eſt-à-dire, qu'on ſépare les deux termes de chaque rapport, par deux points ; & les deux rapports, par quatre points. Les deux points ſignifient *eſt à*, & les quatre points ſignifient *comme ;* de ſorte qu'on dit 3 *eſt à* 15, *comme* 4 *eſt à* 20.

Il faut ſeulement obſerver que, dans la proportion arithmétique, on fait précéder le mot *comme*, du mot *arithmétiquement.*

163. Le premier & le dernier terme de la proportion ſe nomment les *extrêmes ;* le 2e & le 3e ſe nomment les *moyens.*

Comme il y a deux rapports, & par conſéquent deux antécédens & deux conſéquens, on dit, pour le premier rapport, *premier antécédent, premier conſéquent ;* & pour le ſecond, *ſecond antécédent, ſecond conſéquent.*

164. Quand les deux termes moyens d'une proportion ſont égaux, la proportion ſe nomme *proportion continue.*

3 . 7 : 7 . 11 forment une proportion arithmétique continue ; on l'écrit ainſi ÷ 3 . 7 . 11 ; les deux points & la barre qui précèdent, ſont pour avertir que dans l'énoncé on doit répéter le terme 7.

La proportion 5 : 20 : : 20 : 80 eſt une proportion géométrique continue, que par abréviation on écrit ainſi ÷ 5 : 20 : 80 ; l'uſage des quatre points & de la barre eſt le même que dans la proportion arithmétique continue.

165. Il ſuit de ce que nous venons de dire ſur les proportions arithmétiques & géométriques.

1°. Que ſi dans une proportion arithmétique, on ajoute à chacun des antécédens, ou ſi on en retranche la différence ou raiſon qui règne dans cette proportion, ſelon que l'antécédent ſera plus petit

petit ou plus grand que ſon conſéquent, chaque antécédent deviendra égal à ſon conſéquent ; car c'eſt donner au plus petit terme de chaque rapport, ce qui lui manque pour égaler ſon voiſin, ou retrancher du plus grand ce dont il ſurpaſſe ſon voiſin.

Ainſi dans la proportion 3 . 7 : 8 . 12, ajoutez la différence 4 au premier & au troiſième termes, vous aurez 7. 7 : 12 . 12, & il eſt aiſé de ſentir que cela eſt général.

2°. Si dans une proportion géométrique vous multipliez chacun des deux conſéquens par le rapport, vous les rendrez pareillement égaux chacun à ſon antécédent ; car multiplier le conſéquent par le rapport, c'eſt le prendre autant de fois qu'il eſt contenu dans l'antécédent.

Ainſi dans la proportion 12 : 3 :: 20 : 5, multipliez 3 & 5 chacun par 4, & vous aurez 12 : 12 :: 20 : 20 ; pareillement dans la proportion 15 : 9 :: 45 : 27, multipliez 9 & 27 chacun par $\frac{15}{9}$ ou $\frac{5}{3}$ qui eſt le rapport, vous aurez 15 : 15 :: 45 : 45.

Propriétés des Proportions Arithmétiques.

166. La propriété fondamentale des proportions arithmétiques, eſt que *la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens.*

Par exemple, dans cette proportion 3 . 7 : 8 . 12, la ſomme 3 & 12 des extrêmes, & celle 7 & 8 des moyens ; ſont également 15.

Voici comment on peut s'aſſurer que cette propriété eſt générale.

Si les deux premiers termes étoient égaux entre eux, & les deux derniers égaux auſſi entre eux, comme dans cette proportion,

7 . 7 : 12 . 12.

il eſt évident que la ſomme des extrêmes ſeroit égale à celle des moyens.

Or, toute proportion arithmétique peut être ramenée à cet état (165), en ajoutant à chaque antécédent, ou en ôtant la différence qui règne dans la proportion. Cette addition qui augmentera également la ſomme des extrêmes & celle des moyens ne peut rien changer à l'égalité de ces deux ſommes; ainſi ſi elles deviennent égales par cette addition, c'eſt qu'elles étoient égales ſans cette même addition. Le raiſonnement eſt le même pour le cas de la ſouſtraction.

167. Puiſque dans la proportion continue, les deux termes moyens ſont égaux, il ſuit de ce qu'on vient de démontrer, que dans cette même proportion, la ſomme des extrêmes eſt double du terme moyen, ou que le terme moyen eſt la moitié de la ſomme des extrêmes.

Ainſi, pour avoir un moyen arithmétique entre 7 & 15, par exemple; j'ajoute 7 à 15, & prenant la moitié de la ſomme 22, j'ai 11 pour le terme moyen, en ſorte que $\div 7 . 11 . 15$.

Propriétés des Proportions Géométriques.

168. La propriété fondamentale de la proportion géométrique, eſt que *le produit des extrêmes eſt égal aux produit des moyens*; par exemple, dans cette proportion 3 : 15 : : 7 : 35, le produit de 35 par 3, & celui de 15 par 7, ſont également 105.

Voici comment on peut ſe convaincre, que cette propriété a lieu dans toute proportion.

Si les antécédens étoient égaux à leurs conſéquens, comme dans cette proportion,

3 : 3 : : 7 : 7

il eſt évident que le produit des extrêmes ſeroit égal au produit des moyens.

Mais on peut toujours ramener une proportion à cet état (165), en multipliant les deux conſéquens par la raiſon : cette multiplication fera, à la vérité, que le produit des extrêmes ſera un certain nombre de fois plus grand qu'il n'auroit été, ou ſera un certain nombre de fois plus petit, ſi le rapport eſt une fraction ; mais elle produira le même effet ſur celui des moyens : donc, puiſqu'après cette multiplication, le produit des extrêmes ſeroit égal au produit des moyens, ces deux produits doivent auſſi être égaux ſans cette même multiplication.

On peut donc prendre le produit des extrêmes pour celui des moyens, & réciproquement.

Concluons auſſi que *dans la proportion continue, le produit des extrêmes eſt égal au quarré du terme moyen*, & que par conſéquent on a le terme moyen en tirant la racine quarrée du produit des extrêmes.

Ainſi pour avoir un moyen proportionnel géométrique entre 4 & 9, je multiplie 4 par 9, & la racine quarrée 6 du produit 36, eſt le moyen proportionnel cherché.

169. Donc, ſi connoiſſant les trois premiers termes d'une proportion, on vouloit déterminer le quatrième, il faudroit *multiplier le ſecond par le troiſième, & diviſer le produit par le premier ;* car ſi (67) on diviſoit le produit des extrêmes par le premier terme qui eſt un extrême, il eſt évident qu'on auroit pour quotient le quatrième qui eſt l'autre extrême ; puis donc que (168) le produit des moyens eſt la même choſe que celui des extrêmes, en diviſant le produit des moyens par le premier terme, on aura donc le même quotient, c'eſt-à-dire, le quatrième terme.

Ainſi ſi on demande quelle ſeroit le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers ſeroient 3 : 8 :: 12, je multiplie 8 par 12, ce qui me donne 96 que je diviſe par 3 ; le quotient 32 eſt le quatrième terme demandé ; en ſorte que 3, 8, 12, 32 forment une proportion : en effet, le premier rapport eſt $\frac{3}{8}$, & le ſecond eſt $\frac{12}{32}$ qui, (81) en diviſant les deux termes par 4, eſt auſſi $\frac{3}{8}$.

Par un ſemblable raiſonnement, on voit qu'on peut trouver tout autre terme de la proportion, lorſqu'on en connoît trois. *Si le terme qu'on veut trouver eſt un des extrêmes, il faudra multiplier les deux moyens, & diviſer par l'extrême connu : ſi au contraire on veut trouver un des moyens, il faudra multiplier les deux extrêmes, & diviſer par le terme moyen connu.*

170. Cette propriété de l'égalité entre le produit des extrêmes & celui des moyens, ne peut appartenir qu'à quatre quantités en proportion géométrique. En effet, ſi on avoit quatre quantités qui ne fuſſent point en proportion géométrique ; en multipliant les conſéquens, par le rapport des deux premières, il n'y auroit que le premier antécédent qui deviendroit égal à ſon conſéquent ; par exemple, ſi on avoit 3, 12, 5, 10, en multipliant les conſéquens 12 & 10, par la raiſon $\frac{1}{4}$ des deux premiers termes 3 & 12, on auroit 3, 3, 5, $\frac{10}{4}$, dans leſquels il eſt évident que le produit des extrêmes ne peut être égal à celui des moyens ; donc ces produits ne pourroient pas être égaux non plus quand même on n'auroit pas multiplié les conſéquens par la raiſon $\frac{1}{4}$: il eſt viſible que ce raiſonnement peut s'appliquer à tous les cas.

Donc, *ſi quatre quantités ſont telles que le produit des extrêmes ſoit égal au produit des moyens, ces quatre quantités ſont en proportion.* De-là nous conclurons cette ſeconde propriété des proportions.

171. *Si quatre quantités ſont en proportion, elles y ſeront encore ſi on met les extrêmes à la place des moyens, & les moyens à la place des extrêmes.*

172. La même choſe aura lieu ; c'eſt-à-dire, *que la proportion ſubſiſtera ſi on échange les places des extrêmes, ou celles des moyens.*

En effet, dans tous ces cas, il eſt aiſé de voir que le produit des extrêmes ſera toujours égal à celui des moyens.

Ainſi la proportion 3 : 8 :: 12 : 32 peut fournir toutes les proportions ſuivantes par la ſeule permutation des termes.

3 : 8 :: 12 : 32
3 : 12 :: 8 : 32
32 : 12 :: 8 : 3
32 : 8 :: 12 : 3
8 : 3 :: 32 : 12
8 : 32 :: 3 : 12
12 : 3 :: 32 : 8
12 : 32 :: 3 : 8

Et il en eſt de même de toute autre proportion.

173. Puiſqu'on peut mettre le troiſième terme à la place du ſecond, & réciproquement ; on doit en conclure, *qu'on peut, ſans troubler une proportion, multiplier ou diviſer les deux antécédens par un même nombre, & qu'il en eſt de même à l'égard des conſéquens ;* car, en faiſant cette permutation, les deux antécédens de la proportion donnée formeroient le premier rapport, & les deux conſéquens, le ſecond. Et dans ce cas, on voit que c'eſt diviſer les deux termes d'un rapport, chacun par un même nombre, ce qui (160) ne change point ce rapport.

174. *Tout changement fait dans une proportion*

de manière que la ſomme de l'antécédent & du conſéquent, ou leur différence, ſoit comparée à l'antécédent ou au conſéquent, de la même manière, dans chaque rapport, formera toujours une proportion.

Par exemple, ſi on a la proportion

12 : 3 : : 32 : 8

On en pourra conclure les proportions ſuivantes

12 *plus* 3 : 3 : : 32 *plus* 8 : 8
ou 12 *moins* 3 : 3 : : 32 *moins* 8 : 8
ou 12 *plus* 3 : 12 : : 32 *plus* 8 : 32
ou 12 *moins* 3 : 12 : : 32 *moins* 8 : 32

Car, ſi c'eſt au conſéquent que l'on compare, il eſt facile de voir que l'antécédent, augmenté ou diminué du conſéquent, contiendra ce conſéquent une fois de plus, ou une fois de moins qu'auparavant ; & comme cette comparaiſon ſe fait de la même manière pour le ſecond rapport, qui, par la nature de la proportion, eſt égal au premier, il s'enſuit néceſſairement que les deux nouveaux rapports ſeront auſſi égaux entr'eux.

Si c'eſt à l'antécédent que l'on compare, le même raiſonnement aura encore lieu, en concevant que dans la proportion ſur laquelle on fait ce changement, on ait mis l'antécédent de chaque rapport à la place de ſon conſéquent, & le conſéquent à la place de l'antécédent; ce qui eſt permis (171).

175. Puiſqu'en mettant le troiſième terme d'une proportion à la place du ſecond, & réciproquement, il y a encore proportion (172), on doit conclure que les deux antécédens ſe contiennent l'un l'autre, autant de fois que les conſéquens ſe contiennent auſſi l'un l'autre.

Donc *la ſomme des deux antécédens de toute proportion contient la ſomme des deux conſéquens, ou eſt*

contenue en elle, autant qu'un des antécédens contient ſon conſéquent, ou eſt contenu en lui.

Par exemple, dans la proportion

12 : 3 : : 32 : 8

12 plus 32 : 3 plus 8 : : 32 : 8, ce qui eſt évident.

Mais pour s'en convaincre généralement, il n'y à qu'à faire attention que ſi le premier antécédent contient le ſecond quatre fois, par exemple, la ſomme des deux antécédens contiendra le ſecond cinq fois ; & par la même raiſon, la ſomme des conſéquens contiendra le ſecond conſéquent, 5 fois : donc la ſomme des antécédens contiendra celle des conſéquens comme le quintuple d'un des antécédens contient le quintuple de ſon conſéquent ; c'eſt-à-dire, (160) comme un des antécédens contient ſon conſéquent.

On prouveroit de même que la différence des antécédens eſt à la différence des conſéquens, comme un antécédent eſt à ſon conſéquent.

176. Il eſt évident que la propoſition qu'on vient de démontrer, revient à celle-ci ; ſi on a deux rapports égaux,

Par exemple, celui de..... 4 : 12
& celui de..... 7 : 21

11 : 33

On aura encore le même rapport, en ajoutant antécédent à antécédent, & conſéquent à conſéquent.

Donc, *ſi on a pluſieurs rapports égaux, la ſomme de tous les antécédens eſt la ſomme de tous les conſéquens, comme l'un des antécédens eſt à ſon conſéquent.*

Par exemple, ſi on a les rapports égaux 4 : 12 : : 7 : 21 : : 2 : 6, on peut dire que 4 *plus* 7 *plus* 2 ſont à 12 *plus* 21 *plus* 6, comme 4 eſt à 12, ou comme 7 eſt à 21, &c.

Car après avoir ajouté entr'eux les antécédens des deux premiers rapports, & leurs conſéquens auſſi entr'eux, le nouveau rapport, qui, ſelon ce qu'on vient de voir, ſera le même que chacun des deux premiers, ſera auſſi le même que le troiſième ; par conſéquent, on pourra l'ajouter de même avec celui-ci, & il en réſultera encore un rapport égal, & ainſi de ſuite.

177. On appelle *Rapport compoſé* celui qui réſulte de deux ou d'un plus grand nombre de rapports, dont on multiplie les antécédens entr'eux & les conſéquens entr'eux.

Par exemple, ſi on a les deux rapports 12 : 4 & 25 : 5, le produit des antécédens ſera 300, celui des conſéquens ſera 20 ; le rapport de 300 à 20, eſt ce qu'on appelle *rapport compoſé des rapports de 12 à 4 & de 25 à 5.*

178. Ce rapport eſt le même que ſi on avoit évalué ſéparément chacun des rapports compoſans, & qu'on eût multiplié entr'eux les nombres qui expriment ces rapports ; en effet, le rapport de 12 à 4 eſt 3, celui de 25 à 5 eſt 5 ; or 3 fois 5 font 15, qui eſt le rapport de 300 à 20, & on peut voir que cela eſt général, en faiſant attention que le rapport eſt meſuré (157) par une fraction qui a l'antécédent pour numérateur, & le conſéqnent pour dénominateur ; ainſi le rapport compoſé doit être une fraction, qui ait pour numérateur le produit des deux antécédens, & pour dénominateur le produit des deux conſéquens ; c'eſt donc (97) le produit des deux fractions qui expriment les rapports compoſans.

179. Si les rapports que l'on multiplie ſont égaux, le rapport compoſé eſt dit *rapport doublé*,

ſi on n'a multiplié que deux rapports ; *rapport triplé*, ſi on en a multiplié trois ; *quadruplé*, ſi on en a multiplié quatre, & ainſi de ſuite.

180. *Si on a deux proportions, & qu'on les multiplie par ordre ; c'eſt-à-dire, le premier terme de l'une par le premier terme de l'autre ; le ſecond par le ſecond, & ainſi de ſuite ; les quatre produits qui en réſulteront ſeront en proportion.*

Car en multipliant ainſi deux proportions, c'eſt multiplier deux rapports égaux par deux rapports égaux ; donc les deux rapports compoſés qui en réſultent doivent être égaux ; donc les quatre produits doivent être en proportion.

181. Concluons de-là que *les quarrés, les cubes, & en général les puiſſances ſemblables de quatre quantités en proportion, ſont auſſi en proportion*, puiſque pour former ces puiſſances, il ne faut que multiplier la proportion par elle-même pluſieurs fois de ſuite.

182. *Les racines quarrées, cubiques, & en général les racines ſemblables de quatre quantités en proportion, ſont auſſi en proportion ;* car le rapport des racines quarrées des deux premiers termes, n'eſt autre choſe que la racine quarrée du rapport de ces deux termes (157 & 135) ; il en eſt de même du rapport des racines quarrées des deux derniers termes ; donc, puiſque les deux rapports primitifs ſont ſuppoſés égaux, leurs racines quarrées ſont égales ; donc le rapport des racines quarrées des deux premiers termes ſera égal au rapport des racines quarrées des deux derniers. On prouvera de même pour les racines cubique, quatrième, &c.

Uſage des Propoſitions précédentes.

183. Les propoſitions que nous venons de démontrer, & qu'on appelle les *Régles des proportions*, ont des applications continuelles dans toutes les parties des Mathématiques. Nous nous bornerons ici à celles qui appattiennent à l'Arithmétique, & nous commencerons par celle qu'on peut déduire de ce qui a été établi (169), & qui eſt la baſe de preſque toutes les autres.

De la Règle de Trois *directe & ſimple.*

184. On diſtingue pluſieurs ſortes de règles de *Trois*; elles ont toutes pour objet de faire connoître un terme d'une proportion dont on en connoît trois.

Celle qu'on appelle *Règle de Trois directe & ſimple*, eſt nommée *ſimple*, parce que l'énoncé des queſtions auxquelles on l'applique, ne renferme jamais plus de quatre quantités, dont trois ſont connues, & la quatrième eſt à trouver.

On l'appelle *directe*, parce que des quatre quantités qu'on y conſidère, il y en a toujours deux, qui non-ſeulement ſont relatives aux deux autres, mais qui en dépendent de manière que de même qu'une des quantités contient l'autre de même eſpèce, ou eſt contenue en elle, de même auſſi la quantité relative à la première, contient la quantité relative à la ſeconde, ou eſt contenue en elle; c'eſt-à-dire, d'une manière plus abregée, qu'une quantité & ſa relative peuvent toujours être toutes deux ou antécédens ou conſéquens dans la proportion. Dans ce cas, les deux quantités principales ſont dites *directement proportionnelles* à leurs relatives.

EXEMPLE I.

40 Ouvriers ont fait, en un certain temps, 268 toiſes d'ouvrage ; on demande combien 60 ouvriers en pourroient faire dans le même temps ?

Il eſt clair que le nombre des toiſes doit augmenter à proportion du nombre des ouvriers ; en ſorte que celui-ci devenant double, triple, quadruple, &c. le premier doit devenir auſſi double, triple, quadruple, &c. Ainſi l'on voit que le nombre de toiſes cherché doit contenir les 268 toiſes, autant que le nombre 60 relatif au premier, contient le nombre 40 relatif au ſecond : il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci,

$$40 ; 60 :: 268^t,$$

ou [en diviſant ces deux premiers termes par 20, ce qui eſt permis (160)] par ces trois autres,

$$2 : 3 :: 268^t.$$

Ainſi, ſelon qu'il a été dit (169), je multiplie 268^t par 3, & je diviſe le produit 804 par 2, ce qui donne pour quotient 402^t, & par conſéquent 402 toiſes pour l'ouvrage que feroient les 60 ouvriers.

EXEMPLE II.

Un équipage d'Artillerie a fait 34 lieues en 6 jours : on demande en combien de temps il en feroit 255 dans les mêmes circonſtances ?

Il eſt évident qu'il faut plus de temps à proportion du nombre de lieues, & que par conſéquent le nombre de jours cherché doit contenir 6 jours, autant que 255 lieues contiennent 34 : il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci,

$$34 : 255 :: 6 :$$

Multipliant 255 par 6, & diviſant le produit 1530 par 34, on aura 45 jours.

EXEMPLE III.

$52^t\ 4^{pi}\ 5^{po}$ d'ouvrage ont été payées $168^{tt}\ 9^s\ 4^d$; on demande combien on doit payer pour $77^t\ 1^{pi}\ 8^{po}$?

Le prix de $77^t\ 1^{pi}\ 8^{po}$ doit contenir le prix $168^{tt}\ 9^s\ 4^d$ des $52^t\ 4^{pi}\ 5^{po}$, autant que $77^t\ 1^{pi}\ 8^{po}$ contiennent $52^t\ 4^{pi}\ 5^{po}$.

Il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci,

$$52^{t}\ 4^{pi}\ 5^{po} : 77^{t}\ 1^{pi}\ 8^{po} :: 168^{\#}\ 9^{s}\ 4^{d} :$$

c'eſt-à-dire qu'il faut multiplier $168^{\#}\ 9^{s}\ 4^{d}$ par $77^{t}\ 1^{pi}\ 8^{po}$, & diviſer le produit par $52^{t}\ 4^{pi}\ 5^{po}$, ce qu'on peut faire par ce qui a été dit (116 & 122).

Mais il ſera encore plus ſimple de réduire les deux premiers termes à leur plus petite eſpèce, c'eſt-à-dire en pouces, & la queſtion ſera réduite à chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois autres,

$$3797 : 5564 :: 168^{\#}\ 9^{s}\ 4^{d} :$$

alors multipliant $168^{\#}\ 9^{s}\ 4^{d}$ par 5564, on aura $937348^{\#}\ 10^{s}\ 8^{d}$; & diviſant par 3797, le quotient $246^{\#}\ 17^{s}\ 3^{d}\ \frac{2789}{3797}$ ſera ce qu'on doit payer pour les $77^{t}\ 1^{pi}\ 8^{po}$.

S'il y avoit des fractions; après avoir réduit les deux termes de même eſpèce, à leur plus petite unité; comme dans cet exemple, on ſimplifieroit le rapport de ces deux termes de la manière qui a été enſeignée (161).

De la Règle de Trois *inverſe & ſimple.*

185. La règle de *Trois inverſe & ſimple* diffère de la règle de Trois directe, dont nous venons de parler, en ce que, des quatre quantités qui entrent dans l'énoncé de la queſtion pour laquelle on fait cette opération, l'une des qnantités contient la ſeconde de même eſpèce, comme la quantité relative à la première, eſt au contraire contenue dans celle qui eſt relative à la ſeconde; en ſorte que, lorſque par l'examen de la queſtion, on a donné à ces quantités la diſpoſition convenable pour former une proportion, l'une des deux quantités principales & ſa relative forment les extrêmes, tandis que l'autre quantité principale & ſa relative forment les moyens. Dans ce cas, on dit que les deux quantités principales ſont *réciproquement proportionnelles* à leurs relatives.

Au reſte, cela n'introduit aucune difference dans

la manière de faire l'opération ; c'eſt toujours le quatrième terme d'une proportion qu'il s'agit de trouver, ou du moins on peut toujours amener la choſe à ce point.

Quelques Arithméticiens ont preſcrit pour le cas préſent, une règle aſſujettie à l'énoncé de la queſtion : nous ne ſuivrons point leur exemple ; c'eſt la nature de la queſtion, & non pas ſon énoncé (qui ſouvent eſt vicieux) qui doit diriger dans la réſolution.

EXEMPLE I.

30 hommes ont fait un certain ouvrage en 25 jours, combien faudroit-il d'hommes pour faire le même ouvrage en 10 jours ? on voit qu'il faut, dans ce ſecond cas, d'autant plus d'hommes que le nombre de jours eſt moindre ; ainſi le nombre d'hommes cherché doit contenir le nombre de 30 hommes, autant que le nombre 25 de jours, relatif à ceux-ci, contient le nombre 10 de jours, relatif à ceux-là. Il ne s'agit donc que de trouver le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci,

$$10^{j} : 25^{j} : : 30^{hom.}$$

c'eſt-à-dire, de multiplier 30 par 25, & de diviſer le produit 750 pa 10, ce qui donne 75 ou 75 hom.

EXEMPLE II.

Le pied de Londres étant au pied de Roi : : 15 : 16, on demande combien 720 pieds de Londres ſont de pieds de Roi ?

Il eſt clair que pour meſurer une longueur déterminée, il faudra moins de pieds de Roi que de pieds de Londres, dans le même rapport que cette première meſure eſt, au contraire, plus grande que la ſeconde ; en ſorte que la queſtion ſe réduit à calculer le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci,

$$16 : 15 : : 720 :$$

Multipliant donc 720 par 15, & diviſant par 16, on aura 675 pour le nombre de pieds de Roi qui équivalent à 720 pieds de Londres.

EXEMPLE III.

Un Convoi peut faire un certain eſpace en 18 jours, en marchant 5 heures par jour ; mais on voudroit le faire arriver en 12 jours, abſtraction faite des ſéjours ; on demande combien d'heures il doit marcher par jour.

Il eſt évident qu'il doit, chaque jour, marcher pendant un nombre d'heures d'autant plus conſidérable que 5 heures, que le nombre 12 des jours qu'il doit employer, eſt plus petit, au contraire, que le nombre 18 des jours qu'il auroit employés ſi l'on n'eût pas forcé la marche. Ainſi l'état de la queſtion fait voir qu'il s'agit de calculer le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci,

12 : 18 : : 5 :

Multipliant donc 18 par 5, & diviſant par 12, on a $7^h\frac{1}{2}$ pour le nombre d'heures pendant leſquelles le convoi doit marcher chaque jour.

De la Règle de Trois *compoſée.*

186. Dans les deux règles de Trois que nous venons d'expoſer, la quantité cherchée & la quantité de même eſpèce qui entre dans l'énoncé de la queſtion, ont entr'elles un rapport ſimple & déterminé par celui des deux autres quantités qui entrent pareillement dans l'énoncé de la queſtion.

Dans la règle de Trois compoſée, le rapport de la quantité cherchée à la quantité de même eſpèce qui entre dans l'énoncé de la queſtion n'eſt pas donné par le rapport ſimple des deux autres quantités ſeulement, mais par pluſieurs rapports ſimples qu'il s'agit de compoſer (177) d'après l'examen de la queſtion

Quand une fois ces rapports ont été compoſés, la règle eſt réduite à une règle de Trois ſimple ; les exemples ſuivans vont éclaircir ce que nous venons de dire.

EXEMPLE I.

30 hommes ont fait 132 toiſes d'ouvrage en 18 jours; combien 54 hommes en feront-ils en 28 jours?

On voit que l'ouvrage dépend ici, non-ſeulement du nombre des hommes, mais encore du nombre des jours.

Pour avoir égard à l'un & & à l'autre, il faut conſidérer que 30 hommes travaillant pendant 10 jours, ne font qu'autant que dix-huit fois 30 hommes, c'eſt-à-dire, que 540 hommes qui travailleroient pendant un jour.

Pareillement, 54 hommes travaillant pendant vingt-huit jours, ne font qu'autant que feroient vingt-huit fois 54 hommes, ou 1512 hommes travaillant pendant un jour.

La queſtion eſt donc changée en celle-ci: 540 hommes ont fait 132 toiſes d'ouvrage, combien 1512 hommes en feroient-ils dans le même temps? c'eſt-à-dire qu'il faut chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci.

$$540^{h} : 1512^{h} : : 132^{t}.$$

Multipliant 1512 par 132, & diviſant le produit par 540, on trouvera pour réponſe à la queſtion, $369^{t}\ 3^{pi}\ 7^{po}\ 2^{li}\frac{2}{5}$.

EXEMPLE II.

Un homme marchant 7 heures par jour, a mis 30 jours à faire 230 lieues; s'il marchoit 10 heures par jour, combien emploieroit-il de jours pour faire 600 lieues, allant toujours avec la même vîteſſe?

S'il marchoit pendant le même nombre d'heures par jour, dans chaque cas, on voit qu'il emploieroit d'autant plus de jours qu'il a plus de chemin à faire; mais comme il marche pendant un plus grand nombre d'heures chaque jour dans le ſecond cas, il lui faudra moins de temps par cette raiſon; ainſi l'opération tient en partie à la règle de Trois directe, & à la règle de Trois inverſe.

On la réduira à une règle de Trois ſimple, en conſidérant que marcher pendant 30 jours, en employant 7 heures chaque jour, c'eſt marcher pendant 30 fois 7 heures ou 210 heures; ainſi on peut changer la queſtion en cette autre, il a fallu 210 heures pour faire 230 lieues, combien en faudra-t-il pour faire 600 lieues? Quand on aura trouvé le nombre d'heures qui ſatisfait à cette queſtion, en le diviſant par 10 on aura le nombre de jours demandé, puiſque l'homme dont il s'agit emploie dix heures par jour.

Ainſi il faut chercher le quatrième terme de la proportion, dont les trois premiers ſont

$$230^{l} : 600^{l} : : 210^{h}.$$

On trouvera que ce quatrième terme eſt 547 heures & $\frac{19}{171}$ leſquelles diviſées par 10, nombre des heures que cet homme emploie chaque jour, donnent 54 jours & $\frac{190}{270}$ ou $54\frac{13}{27}$ $\frac{19}{27}$.

De la Règle de Société.

187. La règle de Société eſt ainſi nommée, parce qu'elle ſert à partager, entre pluſieurs aſſociés, le bénéfice ou la perte réſultant de leur ſociété.

Son but eſt de partager un nombre propoſé, en parties qui aient entr'elles des rapports donnés.

La règle que l'on donne pour cet effet, eſt fondée ſur ce que nous avons établi (176); nous allons la déduire de ce principe dans l'exemple ſuivant.

EXEMPLE I.

Suppoſons, par exemple, qu'il s'agiſſe de partager 120, en trois parties qui aient entr'elles les mêmes rapports que les nombres 4, 3, 2; l'énoncé de la queſtion fournit cette ſuite de rapports égaux.... 4 eſt à la première partie, comme 3 eſt à la ſeconde, comme 2 eſt à la troiſième.

Or on a vu (176) que la ſomme des antécédens de pluſieurs rapports égaux, eſt à la ſomme des conſéquens, comme un antécédent eſt à ſon conſéquent; on peut donc dire ici, que la ſomme 9 des trois parties proportionnelles à celles que l'on cherche, eſt à la ſomme 120 de celles-ci, comme l'une quelconque des trois parties proportionnelles eſt à la partie de 120 qui lui répond.

La règle ſe réduira donc, 1°. à faire une totalité des parties proportionnelles données : 2°. à faire autant de règles de Trois qu'il y a de parties à trouver, & dont chacune aura, pour premier terme,

terme, la ſomme des parties proportionnelles données, pour ſecond terme le nombre propoſé à diviſer, & pour troiſieme terme l'une des parties proportionnelles données : ainſi dans la queſtion que nous avons priſe pour exemple, on auroit ces trois règles de Trois à faire.

$$9 : 120 :: 4\tfrac{1}{3} :$$
$$9 : 120 :: 3 :$$
$$9 : 120 :: 2 :$$

dont on trouvera que les quatrièmes termes ſont $53\tfrac{1}{3}$, 40, $26\tfrac{2}{3}$ qui ont entr'eux les rapports demandés, & qui compoſent en effet le nombre 120.

Au reſte, il eſt aiſé de remarquer qu'il n'eſt pas abſolument néceſſaire de faire autant de règles de Trois qu'il y a de parties à trouver : on peut ſe diſpenſer de la dernière, en retranchant du nombre propoſé, la ſomme des autres parties quand on les a trouvées.

EXEMPLE II.

On doit diſtribuer à l'île de Ré, à Belle-Iſle & au Port-Louis, un approviſionnement d'outils, ſavoir, 4500 bêches, 2500 pics-hoyaux, 4550 pioches, 820 pics-à-tête, 820 pics-à-roc, 2200 eſcoupes, 1210 ſerpes & 800 haches. Cette diſtribution doit être faite pour chaque eſpèce d'outils, proportionnellement & conformément à un modèle d'approviſionnement par lequel on voit que ſur 8500 outils de même eſpèce, l'île de Ré en a eu 6000, Belle-Iſle 1400, & le Port-Louis 1100. On demande combien il en faut de chaque eſpèce, pour chacun de ces endroits ?

Modèle d'Approviſionnement.

L'ILE DE RÉ.....	6000.
BELLE-ISLE.....	1400.
PORT-LOUIS.....	1100.
	8500.

Puiſque chaque eſpèce d'outils doit être diſtribuée propor-

tionnellement aux nombres 6000, & 1400 & 1100, on trouvera combien chaque endroit en doit avoir d'une eſpèce quelconque, par exemple, de bêches, en calculant le quatrième terme de chacune de ces trois proportions,

8500 : 4500 ou 85 : 45 : : 6000 :
85 : 45 : : 1400 :
85 : 45 : : 1100 :

On s'y prendra de la même manière pour calculer le nombre de pics-hoyaux, de pioches, &c. qui doivent être diſtribués dans chaque endroit; & l'on trouvera que la diſtribution doit être faite comme il ſuit.

	OUTILS.		
	pour l'Île de Ré	pour Belle-Isle.	pour Port-Louis
4500 Bêches....	3177.	741.	582.
2500 Pic-hoyaux.	1765.	412.	523.
4550 Pioches....	3212.	749.	589.
820 Pics-à-tête..	579.	135.	106.
820 Pics-à-roc...	579.	135.	106.
2200 Eſcoupes....	1553.	362.	285.
2210 Serpes.....	1560.	364.	286.
800 Haches....	565.	132.	103.
18400	12990.	3030.	2380.

EXEMPLE III.

Trois bateliers doivent faire entr'eux le décompte de 1500 livres. Le premier s'étoit chargé de 2 milliers qu'il a conduits à 50 lieues; le ſecond a conduit 15 quintaux à 75 lieues; & le troiſième 3 milliers à 60 lieues. On demande ce qui revient à chacun?

Pour réduire cette queſtion à la règle précédente, il faut réduire ces différens tranſports, à une même diſtance, en cette manière.

2 milliers portés à 50 lieues, doivent être payés comme 50 fois 2 milliers ou 100 milliers portés à une lieue. Pareillement 15 quintaux ou 1 millier & demi porté à 75 lieues, ſera payé

comme 75 fois 1 millier & demi, ou 112 ½ milliers portés à une lieue. Enfin 3 milliers portés à 60 lieues doivent être payés comme 60 fois 3 milliers, ou 180 milliers portés à une lieue.

Ainſi la queſtion eſt la même que ſi les trois voituriers avoient porté à la même diſtance, le premier 100 milliers, le ſecond 112 ½ milliers, & le troiſieme 180 milliers. Il s'agit donc de partager 1500 livres en trois parts proportionnelles aux nombres 100, 112½ & 180, en calculant le quatrième terme de chacune des trois proportions ſuivantes.

392½ : 1500 : : 100 : 382^tt 3^f 4^d
392½ : 1500 : : 112½ : 429. 18. 9.
392½ : 1500 : : 180 : 687. 17. 11.

EXEMPLE IV.

Le parc d'une armée conſiſte en 156 pièces de canon. On veut partager cette armée en trois diviſions, de maniére que la force de la premiere diviſion ſoit à celle de la ſeconde : : 5 : 4, & que celle de la première ſoit à celle de la troiſieme : : 7 : 3. Il s'agit de répartir l'artillerie proportionnellement aux forces que doivent avoir les trois diviſions.

Comme la force de la première diviſion eſt repréſentée par 5 dans le premier rapport, & par 7 dans le ſecond, il faut avant tout, la ramener à être repréſentée par le même nombre, ce que l'on fera facilement, en multipliant les deux termes du premier rapport par 7, & les deux termes du ſecond par 5, ce qui ne change point ces rapports. Alors les forces de la première, ſeconde & troiſième diviſion doivent être reſpectivement comme les nombres 35, 28 & 15. Il s'agit donc de partager 156 en trois parties proportionnelles aux nombres 35, 28 & 15, ce qui s'exécute comme dans le premier exemple, & donne 70, 56 & 30.

Des Progreſſions Arithmétiques.

188. La Progreſſion Arithmétique eſt une ſuite de termes, dont chacun ſurpaſſe celui qui le précède, ou en eſt ſurpaſſé, de la même quantité.

Par exemple, cette ſuite.....

÷ 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25, &c.

Eſt une Progreſſion Arithmétique, parce que chaque terme y ſurpaſſe celui qui le précède, d'une même quantité qui eſt ici 3.

Les deux points séparés par une barre qu'on voit ici à la tête de la progreſſion, ſont deſtinés à marquer, qu'en énonçant cette progreſſion, on doit répéter chaque terme, excepté le premier & le dernier, en cette manière 1 *eſt à* 4, *comme* 4 *eſt à* 7, *comme* 7 *eſt à* 10, &c.

La progreſſion eſt dite *croiſſante*, ou *décroiſſante*, ſelon que les termes vont en augmentant ou en diminuant; mais comme les propriétés de l'une & de l'autre ſont les mêmes, en changeant ſeulement les mots *plus* en *moins*, & *ajouter* en *ſouſtraire*, nous la conſidèrerons ici uniquement comme croiſſante.

189. On voit donc, d'après la définition de la Progreſſion Arithmétique, qu'avec le premier terme & la différence commune, ou la raiſon de la progreſſion, on peut former tous les autres termes, en ajoutant conſécutivement cette raiſon, & que par conſéquent;

Le ſecond terme eſt compoſé du premier plus la raiſon.

Le troiſième, compoſé du ſecond plus la raiſon, & par conſéquent du premier plus deux fois la raiſon.

Le quatrième, compoſé du troiſième plus la raiſon, & par conſéquent du premier plus trois fois la raiſon, & ainſi de ſuite.

190. De ſorte qu'on peut dire en général *qu'un terme quelconque d'une progreſſion arithmétique eſt compoſé du premier plus autant de fois la raiſon qu'il y a de termes avant lui.*

191. Donc, ſi le premier terme étoit zéro, tout autre terme de la progreſſion ſeroit égal à autant

de fois la raiſon qu'il y auroit de termes avant lui.

192. Ce principe peut avoir les deux applications ſuivantes :

1°. Il ſert à trouver un terme quelconque d'une progreſſion, ſans qu'on ſoit obligé de calculer ceux qui le précèdent : qu'on demande, par exemple, quel ſeroit le 100e terme de cette progreſſion....

$\div 4 . 9 . 14 . 19 . 24$, &c.

Puiſque ce terme cherché doit être le centième, il a donc 99 termes avant lui ; il eſt donc compoſé du premier terme 4 & de 99 fois la raiſon 5 ; il eſt donc 4 plus 495 ; c'eſt-à-dire, 499.

193. 2°. Ce même principe ſert à lier deux nombres quelconques, par une ſuite de tant d'autres nombres qu'on voudra, de manière que le tout forme une progreſſion arithmétique ; ce qu'on appelle *inſérer* entre deux nombres donnés, pluſieurs *moyens proportionnels arithmétiques*, ou ſimplement pluſieurs *moyens arithmétiques*.

Par exemple, on peut lier 1 & 7 par cinq nombres qui faſſent une progreſſion arithmétique avec 1 & 7 ; ces nombres ſont 2, 3, 4, 5, 6 ; mais comme il n'eſt pas toujours aiſé de voir, du premier coup-d'œil, quels doivent être ces nombres, voici comment on peut le trouver à l'aide du principe que nous venons de poſer.

Il ne s'agit que de trouver la raiſon qui doit régner dans cette progreſſion.

Or le plus grand des deux nombres propoſés, devant être le dernier terme de la progreſſion, doit être compoſé du premier, c'eſt-à-dire, du plus petit de ces deux nombres, plus autant de fois la raiſon qu'il y a de termes avant lui ; donc,

ſi du plus grand de ces deux nombres on retranche le plus petit, le reſte ſera compoſé d'autant de fois la raiſon qu'il doit y avoir de termes avant le plus grand; c'eſt-à-dire, qu'il eſt le produit de la multiplication de cette raiſon par le nombre des termes qui précèdent le plus grand; donc (67) ſi on diviſe ce reſte par le nombre des termes qui doivent précéder le plus grand, on aura cette raiſon.

Or le nombre des termes qui doivent précéder le plus grand, eſt plus grand d'une unité que le nombre des moyens qu'on veut inſérer entre les deux; donc, *pour inſérer entre deux nombres donnés, tant de moyens arithmétiques qu'on voudra, il faut retrancher le plus petit de ces deux nombres, du plus grand, & diviſer le reſte par le nombre des moyens augmenté d'une unité.* Le quotient ſera la différence ou la raiſon qui doit régner dans la progreſſion.

Par exemple, ſi entre 4 & 11, on demande d'inſérer 8 moyens arithmétiques; je retranche 4 de 11, il me reſte 7 que je diviſe par 9 nombres des moyens augmenté de l'unité; le quotient $\frac{7}{9}$ eſt la différence qui doit régner dans la progreſſion qui ſera par conſéquent $\frac{7}{9}$ 4 . $4\frac{7}{9}$. $5\frac{5}{9}$. $6\frac{3}{9}$. $7\frac{1}{9}$. $7\frac{8}{9}$. $8\frac{6}{9}$. $9\frac{4}{9}$ $10\frac{2}{9}$. 11.

Pareillement ſi on demandoit neuf moyens arithmétiques entre 0 & 1; retranchant 0 de 1, il reſte 1 qu'il faudroit diviſer par 10, nombre des moyens augmenté de l'unité; ce qui donne $\frac{1}{10}$ ou 0, 1 pour la raiſon, & par conſéquent la progreſſion ſera... $\frac{1}{10}$ 0 . 0,1 . 0,2 . 0,3 . 0,4 . 0,5 . 0,6 . 0,7 . 0,8 . 0,9 . 1.

194. On voit par-là, qu'entre deux nombres, ſi voiſins qu'ils puiſſent être l'un de l'autre, on peut toujours inſérer tant de moyens arithmétiques qu'on voudra.

Nous n'en dirons pas davantage ſur les progreſſions arithmétiques que nous ne traitons ici que par rapport aux Logarithmes dont nous parlerons plus

bas; nous aurons occaſion d'y revenir ailleurs.

Des Progreſſions Géométriques.

195. La Progreſſion Géométrique eſt une ſuite de termes, dont chacun contient celui qui le précède, ou eſt contenu en lui, le même nombre de fois : par exemple, cette ſuite.....

$$\div\!\!\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192$$

Eſt une progreſſion géométrique, parce que chaque terme contient celui qui le précède, le même nombre de fois qui eſt ici 2.

Ce nombre de fois eſt ce qu'on appelle *la raiſon* de la progreſſion.

Les quatre points qui précèdent la progreſſion, ont la même ſignification que les deux points qui précèdent la progreſſion arithmétique (188).

La progreſſion eſt dite *croiſſante ou décroiſſante*, ſelon que les termes vont en augmentant ou en diminuant.

Nous conſidérerons toujours la progreſſion géométrique comme croiſſante, parce que les propriétés ſont les mêmes dans l'une & dans l'autre, en changeant le mot de *multiplier* en celui de *diviſer*, & celui de *contenir* en ceux de *être contenu*.

Puiſque le ſecond terme contient le premier autant de fois qu'il y a d'unités dans la raiſon, il eſt donc compoſé du premier multiplié par la raiſon.

Puiſque le troiſième terme contient le ſecond autant de fois qu'il y a d'unités dans la raiſon, il eſt donc compoſé du ſecond multiplié par la raiſon, & par conſéquent du premier multiplié par la raiſon, & encore multiplié par la raiſon; c'eſt-à-dire, du premier multiplié par le quarré, ou la ſeconde puiſſance de la raiſon.

Puiſque le quatrième terme contient le troiſième

autant de fois qu'il y a d'unités dans la raiſon, il eſt donc compoſé du troiſième multiplié par la raiſon, & par conſéquent du premier multiplié par le quarré de la raiſon, & encore multiplié par la raiſon; c'eſt-à-dire, multiplié par le cube, ou la troiſième puiſſance de la raiſon.

Par exemple, dans *la progreſſion ci-deſſus*, 6 eſt compoſé du premier terme 3, multiplié par la raiſon 2; 12 eſt compoſé du premier terme 3, multiplié par le quarré 4 de la raiſon 2; 24 eſt compoſé du premier terme 3, multiplié par le cube 8 de la raiſon 2.

196. En continuant le même raiſonnement, on voit qu'*un terme quelconque de la progreſſion géométrique, eſt compoſé du premier multiplié par la raiſon élevée une puiſſance marquée par le nombre des termes qui précèdent ce terme quelconque.* Donc ſi le premier terme de la progreſſion eſt l'unité, chaque autre terme ſera formé de la raiſon même, élevée à une puiſſance marquée par le nombre des termes qui le précèdent; car la multiplication par le premier terme qui eſt l'unité, n'augmente point le produit.

Pour élever un nombre à une puiſſance propoſée; à la ſeptième, par exemple, il faut, ſuivant l'idée que nous avons donnée des puiſſances, multiplier ce nombre par lui-même ſix fois conſécutives; ainſi pour élever 2 à la ſeptième puiſſance, je dirois 2 fois 2 font 4, 2 fois 4 font 8, 2 fois 8 font 16, 2 fois 16 ſont 32, 2 fois 32 font 64, 2 fois 64 font 128, qui ſeroit la ſeptième puiſſance de 2; mais on peut abréger l'opération en diverſes manières; par exemple, je puis d'abord quarrer 2, ce qui fait 4, cuber ce 4, ce qui donne 64, & le multiplier par 2, ce qui fait 128; ou bien je puis cuber 2, ce qui donne 8; quarrer 8, ce qui donne 64; & multiplier 64 par 2, ce qui donne 128; en un mot, peu importe de quelle façon on s'y prenne, pourvu que 2 ſe trouve 7 fois facteur dans le produit.

197. Le principe que nous venons de propoſer

(196) sur la formation d'un terme quelconque de la progreſſion, & la remarque que nous venons de faire, peuvent ſervir à calculer tel terme qu'on voudra de la progreſſion; ſans être obligé de calculer ceux qui le précedent : ſi on demande, par exemple, quel ſeroit le douziéme terme de la progreſſion, ...

$\div\!\!\div$ 3 : 6 : 12 : 24, &c.

Comme je ſais (196) que ce douzieme terme doit être compoſé du premier multiplié par la raiſon élevée à une puiſſance marquée par le nombre des termes qui précedent ce douzieme; je vois que, pour le former, il faut multiplier 3 par la onzieme puiſſance de la raiſon 2; pour former cette onzieme puiſſance, je cube 2, ce qui me donne 8; je cube 8, ce qui me donne 512 pour la neuvieme puiſſance; & enfin je multiplie 512, neuvieme puiſſance de la raiſon, par 4, ſeconde puiſſance, & j'ai 2048 pour la onzieme puiſſance de 2; je multiplie donc 2048 par 3, & j'ai 6144 pour le douzieme terme de la progreſſion.

198. Une autre application qu'on peut faire du même principe, c'eſt pour trouver tant de moyens proportionnels géométriques qu'on voudra entre deux nombres donnés. Si on demandoit trois moyens géométriques entre 4 & 64; avec un peu d'attention on voit que ces trois moyens géométriques ſont 8, 16, 32; en effet, $\div\!\!\div$ 4 : 8 : 16 : 32 : 64, forment une progreſſion géométrique; mais ſi on propoſoit d'autres nombres que 4 & 64, ou que l'on demandât tout autre nombre de moyens géométriques, on ne les trouveroit pas auſſi facilement.

Or voici comment on peut les trouver en vertu du principe dont il s'agit.

La queſtion ſe réduit à trouver la raiſon qui doit régner dans la progreſſion, parce que, quand elle ſera trouvée, on formera aiſément les termes par des multiplications ſucceſſives par cette raiſon.

Qu'il ſoit queſtion, par exemple, de trouver neuf moyens géométriques entre 2 & 2048.

2048 ſera donc le dernier terme d'une progreſſion géométrique qui commence par 2, & qui doit avoir neuf termes entre le premier & le dernier; 2048 eſt donc compoſé du premier terme 2, multiplié par la raiſon élevée à une puiſſance marquée par le nombre des termes qui doivent précéder 2048; donc (67), ſi on diviſe 2048 par le premier terme, le quotient ſera la raiſon élevée à une puiſſance marquée par le nombre des termes qui doivent précéder 2048; donc, en cherchant quelle eſt la racine de cette puiſſance, on aura la raiſon: or cette puiſſance doit être la dixième, puiſque devant y avoir neuf termes entre 2 & 2048, il y en a néceſſairement dix avant 2048; donc il faut extraire la racine dixième du quotient qu'aura donné le plus grand nombre 2048, diviſé par le plus petit 2.

199. Comme on peut faire le même raiſonnement dans tous les cas, concluons donc en général que, *pour inſérer entre deux nombres donnés, tant de moyens géométriques qu'on voudra, il faut diviſer le plus grand de ces deux nombres par le plus petit, ce qui donnera un quotient; on extraira, de ce quotient, une racine du degré marqué par le nombre des moyens augmenté de l'unité.*

Ainſi, pour revenir à notre exemple, je diviſe 2048 par 2, ce qui me donne 1024, dont je cherche la racine dixième *; elle eſt 2; donc la raiſon

* Nous n'avons pas donné de méthode pour extraire la racine dixième d'un nombre; mais il en eſt de celle-ci comme de la racine quarrée & de

eſt 2; ainſi pour former les moyens en queſtion, je multiplie le premier terme 2, continuellement par la raiſon 2; & après avoir formé neuf moyens, je tombe ſur 2048, comme on le voit ici.....
2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.

Pareillement, ſi on demandoit de trouver quatre moyens géométriques entre 6 & 48, je diviſerois 48 par 6, & du quotient 8 je tirerois la racine 5e; comme 8 n'a pas de racine 5e exacte, on ne peut jamais aſſigner exactement en nombres, quatre moyens géométriques entre 6 & 48; mais on peut approcher de cette racine ſi près qu'on le voudra, par une méthode analogue à celles de la racine quarrée & de la racine cubique, & que nous ferons connoître dans l'Algèbre. En attendant, il ſuffit qu'on conçoive, qu'il eſt poſſible de trouver un nombre qui, multiplié quatre fois par lui-même approche de plus en plus de reproduire 8, & qu'il en eſt de même pour tout autre nombre & pour toute autre racine; & de-là nous conclurons qu'entre deux nombres quelconques, on peut toujours trouver tant de moyens géométriques qu'on voudra, ſoit exactement, ſoit par une approximation pouſſée à tel dégré qu'on voudra, & c'eſt tout ce qu'il nous faut pour paſſer aux Logarithmes.

Des Logarithmes.

200. Les *Logarithmes* ſont des nombres en pro-

la racine cubique, la racine quarrée ne doit avoir qu'un chiffre, lorſque le nombre propoſé n'en a pas plus de 2; la racine cubique ne doit avoir qu'un chiffre, lorſque le nombre propoſé n'en a pas plus de trois; pareillement la racine 10e n'aura jamais qu'un chiffre, tant que le nombre propoſé n'en aura pas plus de 10; il en eſt de même pour les autres racines; la trentième, par exemple, n'aura qu'un chiffre, ſi le nombre propoſé n'a pas plus de 30 chiffres; cela ſe démontre, comme on l'a fait pour la racine quarrée & la racine cubique.

greſſion arithmétique, qui répondent terme pour terme à une pareille ſuite de nombres en progreſſion géométrique. Si on a, par exemple, la progreſſion géométrique & la progreſſion arithmétique ſuivantes,

∷ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256, &c.
÷ 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17, &c.

Chaque terme de la ſuite inférieure eſt dit le logarithme du terme qui eſt à pareille place dans la ſuite ſupérieure.

201. Un même nombre peut donc avoir une infinité de logarithmes différens, puiſqu'à la même progreſſion géométrique on peut faire correſpondre une infinité de progreſſions arithmétiques différentes.

Comme nous ne conſidérons ici les logarithmes que par rapport à l'uſage qu'on peut en faire dans les calculs numériques, nous ne nous arrêterons pas à conſidérer les différentes progreſſions géométriques & arithmétiques qu'on pourroit comparer entr'elles; nous paſſons tout de ſuite à celles qu'on a conſidérées dans la formation des tables de logarithmes.

202. On a choiſi pour progreſſion géométrique, la progreſſion décuple, & pour progreſſion arithmétique la ſuite naturelle des nombres; c'eſt-à-dire, qu'on a choiſi les deux progreſſions ſuivantes,

∷ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000
÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6

Ainſi il ſera toujours aiſé de reconnoître quel eſt le logarithme d'un nombre exprimé par l'unité ſuivie de tant de zéros qu'on voudra; il a toujours autant d'unités qu'il y a de zéros à la ſuite de cette unité.

203. Quant aux logarithmes des nombres inter-

médiaires aux termes de la progreſſion décuple, voici comment on parviendroit à les déterminer ſi l'on n'avoit d'autres moyens que ceux que l'Arithmétique ſeule peut fournir.

204. D'après la définition que nous avons donnée des logarithmes, on voit que pour avoir le logarithme d'un nombre quelconque, de 3, par exemple, il faut que ce nombre puiſſe faire partie de la progreſſion géométrique fondamentale. Or, quoiqu'on ne voie pas que 3 puiſſe faire partie de la progreſſion géométrique ∴ 1 : 10 : 100, &c. cependant on voit que ſi, entre 1 & 10, on inſéroit un très-grand nombre de moyens géométriques (199); comme on monteroit alors de 1 à 10 par des degrés d'autant plus ſerrés que le nombre de ces moyens ſeroit plus grand, il arriveroit de deux choſes l'une, ou que quelqu'un de ces moyens ſe trouveroit être préciſément le nombre 3, ou du moins il s'en trouveroit deux conſécutifs entre leſquels le nombre 3 ſeroit compris, & dont chacun différeroit d'autant moins de 3, que le nombre des moyens inſérés ſeroit plus grand.

Cela poſé, ſi on inſéroit pareillement entre 0 & 1 autant de moyens arithmétiques qu'on a inſéré de moyens géométriques entre 1 & 10, chaque terme de la progreſſion géométrique ayant pour logarithme le terme correſpondant de la progreſſion arithmétique, on prendroit dans celle-ci, pour logarithme de 3, le nombre qui s'y trouveroit à pareille place que 3 ſe trouve dans la progreſſion géométrique; ou ſi 3 n'étoit pas exactement quelqu'un des termes de celle-ci, on prendroit dans la progreſſion arithmétiques, le terme qui répondroit à celui de la progreſſion géométrique, qui approche le plus du nombre 3.

C'eſt ainſi qu'on pourroit s'y prendre en effet, ſi l'on n'avoit d'autres expédiens que ceux que peut fournir l'Arithmétique. Quoi qu'il en ſoit, c'eſt à cela que revient le calcul des logarithmes.

205. Il faut donc ſe repréſenter qu'ayant inſéré 10000000 moyens géométriques entre 1 & 1 , pareil nombre entre 10 & 100, pareil nombre entre 100 & 1000, &c. on a inſéré auſſi pareil nombre de moyens arithmétiques entre 0 & 1, pareil nombre entre 1 & 2, pareil nombre entre 2 & 3; qu'ayant rangé tous les premiers ſur une même ligne, & tous les ſeconds au-deſſous, on a cherché dans la première le nombre le plus approchant de 3, & on a pris dans la ſuite inférieure le nombre correſpondant; qu'on a cherché de même dans la première, le nombre le plus approchant de 2, & qu'on a pris dans la ſuite inférieure le nombre correſpondant; qu'on en a fait de même ſucceſſivement pour les nombres 4, 5, 6, &c. qu'enfin ayant tranſporté dans une même colonne, comme on le voit dans la Table ci-jointe, les nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. on a écrit dans une colonne à côté, les termes de la progreſſion arithmétique qu'on a trouvés correſpondans à ceux-là, ou du moins à ceux qui en approchoient le plus; alors on aura l'idée de la formation des logarithmes, & de leur diſpoſition dans les Tables ordinaires.

TABLE des Logarithmes des nombres naturels, depuis 1 jusqu'à 200.

Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.
0	Infini nég.	30	1,477121	60	1,778151	90	1,954243
1	0,000000	31	1,491362	61	1,785330	91	1,959041
2	0,301030	32	1,505150	62	1,792392	92	1,963788
3	0,477121	33	1,518514	63	1,799341	93	1,968483
4	0,602060	34	1,531479	64	1,806180	94	1,973128
5	0,698970	35	1,544068	65	1,812913	95	1,977724
6	0,778151	36	1,556303	66	1,819544	96	1,982271
7	0,845098	37	1,568202	67	1,826075	97	1,986772
8	0,903090	38	1,579784	68	1,832509	98	1,991226
9	0,954243	39	1,591065	69	1,838849	99	1,995635
10	1,000000	40	1,602060	70	1,845098	100	2,000000
11	1,041393	41	1,612784	71	1,851258	101	2,004321
12	1,079181	42	1,623249	72	1,857332	102	2,008600
13	1,113943	43	1,633468	73	1,863323	103	2,012837
14	1,146128	44	1,643453	74	1,869232	104	2,017033
15	1,176091	45	1,653213	75	1,875061	105	2,021189
16	1,204120	46	1,662758	76	1,880814	106	2,025306
17	1,230449	47	1,672098	77	1,886491	107	2,029384
18	1,255273	48	1,681241	78	1,892095	108	2,033424
19	1,278754	49	1,690196	79	1,897627	109	2,037426
20	1,301030	50	1,698970	80	1,903090	110	2,041393
21	1,322219	51	1,707570	81	1,908485	111	2,045323
22	1,342423	52	1,716003	82	1,913814	112	2,049218
23	1,361728	53	1,724276	83	1,919078	113	2,053078
24	1,380211	54	1,732394	84	1,924279	114	2,056905
25	1,397940	55	1,740363	85	1,929419	115	2,060698
26	1,414973	56	1,748188	86	1,934498	116	2,064458
27	1,431364	57	1,755875	87	1,939519	117	2,068186
28	1,447158	58	1,763428	88	1,944483	118	2,071882
29	1,462398	59	1,770852	89	1,949390	119	2,075547
30	1,477121	60	1,778151	90	1,954243	120	2,079181

Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.
120	2,079181	140	2,146128	160	2,204120	180	2,255273
121	2,082785	141	2,149219	161	2,206826	181	2,257679
122	2,086360	142	2,152288	162	2,209515	182	2,260071
123	2,089905	143	2,155336	163	2,212188	183	2,262451
124	2,093422	144	2,158362	164	2,214844	184	2,264818
125	2,096910	145	2,161368	165	2,217484	185	2,267172
126	2,100371	146	2,164353	166	2,220108	186	2,269513
127	2,103804	147	2,167317	167	2,222716	187	2,271842
128	2,107210	148	2,170262	168	2,225309	188	2,274158
129	2,110590	149	2,173186	169	2,227887	189	2,276462
130	2,113943	150	2,176091	170	2,230449	190	2,278754
131	2,117271	151	2,178977	171	2,232996	191	2,281033
132	2,120574	152	2,181844	172	2,235528	192	2,283301
133	2,123852	153	2,184691	173	2,238046	193	2,285557
134	2,127105	154	2,187521	174	2,240549	194	2,287802
135	2,130334	155	2,190332	175	2,243038	195	2,290035
136	2,133539	156	2,193125	176	2,245513	196	2,292256
137	2,136721	157	2,195900	177	2,247973	197	2,294466
138	2,139879	158	2,198657	178	2,250420	198	2,296665
139	2,143015	159	2,201397	179	2,252853	199	2,298853
140	2,146128	160	2,204120	180	2,255273	200	2,301030

Les logarithmes renfermés dans cette Table n'ont que ſix chiffres après la virgule; ils en ont ſept dans les Tables ordinaires; mais cette différence ne nuit en rien à l'uſage que nous en ferons ici.

206. Remarquons au ſujet des Tables de logarithmes, que le premier chiffre de chaque logarithme s'appelle la *Caractériſtique*, parce que c'eſt par ce chiffre qu'on peut juger dans quelle décade eſt compris le nombre auquel appartient ce logarithme. Par exemple, ſi un nombre a pour caractériſtique 3, je ſais qu'il appartient à des mille, parce que le logarithme de 1000 eſt 3, & que celui de 10000 étant 4, tout nombre depuis 1000 juſqu'à 10000 ne peut avoir pour logarithme que 3 & une fraction; il a donc 3 pour caractériſtique, & les autres chiffres expriment cette fraction réduite en décimales.

Propriétés

Propriétés des Logarithmes.

Les propriétés des logarithmes, dont nous allons parler, ſont, pour la plupart, particulières au ſyſtême de logarithmes où la progreſſion géométrique fondamentale commence par l'unité, & la progreſſion arithmétique par zéro. Les uſages que nous en conclurons ne ſeroient pas les mêmes, ſi les deux progreſſions, ou l'une des deux ſeulement, commençoient autrement : mais la conſidération de celles-ci eſt étrangère à notre objet.

207. Comparons donc, terme à terme, une progreſſion géométrique quelconque, mais dont le premier terme ſoit l'unité, avec une progreſſion arithmétique auſſi quelconque, mais dont le premier terme ſoit zéro ; par exemple, les deux progreſſions ſuivantes.....

$$\begin{array}{l} \div\ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561, \text{ \&c.} \\ -\ 0 . 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32, \text{ \&c.} \end{array}$$

Il ſuit de la nature & de la correſpondance parfaite de ces deux progreſſions, qu'autant de fois la raiſon de la première a dû être facteur pour former l'un quelconque des termes de cette progreſſion, autant de fois la raiſon de la ſeconde a dû être ajoutée pour former le terme correſpondant de cette ſeconde ; par exemple, dans le terme 2187, la raiſon 3 eſt ſept fois facteur, & dans le terme 28, la raiſon 4 eſt contenue ſept fois.

En effet, ſelon ce qui a été dit (190 & 196), la raiſon eſt facteur dans un terme quelconque de la première, autant de fois qu'il y a de termes avant celui-là ; & dans la ſeconde, un terme quelconque eſt compoſé d'autant de fois la raiſon qu'il y a de termes avant lui. Or il y a le même

nombre de termes de part & d'autre; donc, &c.

Concluons de-là qu'un terme quelconque de la progreſſion géométrique, aura toujours pour correſpondant dans la progreſſion arithmétique, un terme qui contiendra la raiſon de celle-ci, autant de fois que la raiſon de l'autre eſt facteur dans ce terme de la progreſſion géométrique.

208. Donc, *ſi on multiplie, l'un par l'autre, deux termes de la progreſſion géométrique, & ſi on ajoute en même temps les deux termes correſpondans de la progreſſion arithmétique, le produit & la ſomme ſeront deux termes qui ſe correſpondront dans ces progreſſions.*

Car le produit ſera formé de la raiſon autant de fois facteur qu'elle l'eſt, tant dans l'un des termes multipliés, que dans l'autre; & la ſomme des deux termes ajoutés, ſera formée de la raiſon de la progreſſion arithmétique ajoutée autant de fois qu'elle l'eſt, tant dans l'un des termes ajoutés, que dans l'autre; donc puiſqu'on a pris des termes correſpondans dans les deux progreſſions, la raiſon géométrique ſera facteur dans le produit, autant que la raiſon arithmétique ſera ajoutée à elle-même dans la ſomme; donc le produit & la ſomme ſe correſpondront.

209. Donc on peut, par l'addition ſeule de deux termes de la progreſſion arithmétique, connoître le produit des deux termes correſpondans de la progreſſion géométrique, en ſuppoſant ces deux progreſſions prolongées ſuffiſamment.

Par exemple, en ajoutant les deux termes 8 & 24 qui répondent à 9 & 729, j'ai 32 qui répond à 6561; d'où je conclus que le produit de 729 par 9, eſt 6561, ce qui eſt en effet.

210. Donc, puiſque les nombres naturels qui compoſent la première colonne de la Table ci-deſſus, ont été tirés d'une progreſſion géométrique qui

commence par l'unité, & puiſque leurs logarithmes ſont les termes correſpondans d'une progreſſion arithmétique, qui commence par zéro; il faut en conclure, qu'en *ajoutant les logarithmes de deux nombres, on a le logarithme de leur produit.*

De-là il eſt aiſé de conclure les uſages ſuivans.

Uſages des Logarithmes.

211. Pour faire une multiplication par logarithmes, il faut ajouter le logarithme du multiplicande, au logarithme du multiplicateur, la ſomme ſera le logarithme du produit; c'eſt pourquoi, cherchant cette ſomme parmi les logarithmes des Tables, on trouvera le produit à côté.

Par exemple, ſi on propoſe de multiplier 14 par 13.

Je trouve dans la petite Table ci-deſſus, que le logarithme de 14 eſt..... 1,146128

& que celui de 13 eſt..... 1,113943

La ſomme..... 2,260071

répond dans la même table au nombre 182, qui eſt en effet le produit.

212. Pour quarrer un nombre, il ſuffit donc de doubler ſon logarithme, puiſqu'il faudroit ajouter ce logarithme à lui-même, pour multiplier le nombre par lui-même.

213. Par une raiſon ſemblable, pour cuber un nombre, il faudra tripler ſon logarithme; & en général, pour élever un nombre à une puiſſance quelconque, il faudra prendre ſon logarithme autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre qui marque cette puiſſance; c'eſt-à-dire, multiplier ſon logarithme par le nombre qui marque cette puiſſance; par exemple, pour élever un nombre à la ſeptième puiſſance, il faudra multiplier par 7 le logarithme de ce nombre.

214. Donc, pour extraire la racine quarrée, cubique, quatrième, &c. d'un nombre proposé, il faudra diviser le logarithme de ce nombre par 2, 3, 4, &c. c'est-à-dire, en général par le nombre qui marque le degré de la racine qu'on veut extraire.

Par exemple, si on demande la racine quarrée de 144, ayant trouvé dans la table que le logarithme de ce nombre est 2,158362, j'en prends la moitié 1,079181; je cherche parmi les logarithmes, à quel endroit se trouve 1,079181; il répond à 12, qui est par conséquent la racine quarrée de 144.

Si on demande la racine septième de 128, je cherche dans la table son logarithme, que je trouve être 2,107210; j'en prends le septième, ou je divise par 7, & je cherche à quoi répond dans la table le quotient 0,301030, il répond à 2, qui est en effet la racine septième de 128.

215. Pour trouver le quotient de la division d'un nombre par un autre, il faut retrancher le logarithme du diviseur, du logarithme du dividende, chercher dans la table à quel nombre répond le logarithme restant; ce nombre sera le quotient.

Par exemple, si on veut diviser 187 par 17, je cherche, dans la Table, les logarithmes de ces deux nombres, & je trouve...

Le logarithme de 187.....	2,271842
Celui de 17.....	1,230449
La différence.....	1,041393

répond, dans la Table, à 11 qui est en effet le quotient.

Si la division ne pouvoit pas être faite exactement, le logarithme restant ne se trouveroit qu'en partie dans la Table; mais nous allons enseigner ci-après ce qu'il faut faire dans ce cas.

La raison de cette règle est fondée, sur ce que le quotient multiplié par le diviseur, devant reproduire le dividende (68), le logarithme du quotient ajouté (210) au logarithme du diviseur, doit donc composer le logarithme du dividende, & par

conſéquent le logarithme du quotient vaut le logarithme du dividende, moins celui du diviſeur.

216. D'après ce que nous venons de dire, il eſt très-facile de voir, que pour faire une règle de Trois par logarithmes, il faut ajouter le logarithme du ſecond terme, au logarithme du troiſième, & de la ſomme retrancher le logarithme du premier.

217. Remarquons que quand on cherche dans les Tables ordinaires un logarithme réſultant de quelques opérations ſur d'autres logarithmes ; ſi l'on ne trouve qu'une unité de différence entre le dernier chiffre de ce logarithme, & celui de la Table, on doit regarder cette différence comme nulle, parce que les logarithmes de tous les nombres intermédiaires à la progreſſion décuple, ne ſont qu'approchés à environ une demi-unité décimale du ſeptième ordre près.

Des Nombres dont les Logarithmes ne ſe trouvent point dans les Tables.

218. Les fractions & les nombres entiers joints à des fractions, n'ont pas leurs logarithmes dans les tables ; il en eſt de même des racines quarrées, cubiques, &c. des nombres qui ne ſont pas des puiſſances parfaites du degré de ces racines.

Si on demande le logarithme d'un nombre entier joint à une fraction, il faut d'abord réduire le tout en fraction, & enſuite retrancher le logarithme du dénominateur, du logarithme du nouveau numérateur.

Par exemple, pour avoir le logarithme de $8\frac{1}{11}$, je cherche celui de $\frac{21}{11}$, que je trouve en retranchant 1,041393 logarithme de 11,

de 1,959041 logarithme de 91 ; le reſte 0,917648 eſt le logarithme de 8 $\frac{3}{11}$, puiſque 8 $\frac{3}{11}$ ou $\frac{91}{11}$, n'eſt autre choſe que 91 diviſé par 11 (90).

219. Si la fraction qui accompagne l'entier étoit une fraction décimale, l'opération ſe réduiroit à chercher le logarithme, ſans aucune attention à la virgule qui ſépare les décimales dans le nombre propoſé, & on retrancheroit de la caractériſtique de ce logarithme, autant d'unités qu'il y avoit de chiffres décimaux dans ce même nombre propoſé.

Par exemple, ſi on demande le logarithme de 1,53, je prends le logarithme de 153, qui eſt 2,184691 ; mais comme ce logarithme appartient à un nombre 100 fois plus grand que 1,53, je retranche de ſa caractériſtique 2 unités, qui ſont le logarithme de 100, ce qui (216) correſpond à la diviſion par 100, & j'ai 0,184691 pour le logarithme de 1,53.

220. La même raiſon prouve que, pour avoir le logarithme d'une fraction, il faut retrancher pareillement le logarithme du dénominateur, du logarithme du numérateur ; mais comme cette ſouſtraction ne peut ſe faire, puiſque le logarithme du dénominateur ſera plus grand que celui du numérateur, on retranchera au contraire le logarithme du numérateur, de celui du dénominateur ; le reſte, qui marquera ce dont il s'en faut que la ſouſtraction n'ait pu ſe faire, ſera le logarithme de la fraction, en appliquant à ce reſte un ſigne qui marque que la ſouſtraction n'a pas été entièrement faite. Ce ſigne eſt celui-ci —, qu'on énonce *moins*. Ainſi le logarithme de la fraction $\frac{11}{91}$ ſeroit —0,917648. *.

* Les Nombres précédés du ſigne — ſe nomment nombres *négatifs*. Nous les ferons connoître dans l'Algèbre : en attendant, nous prévenons que c'eſt en prendre une idée fauſſe, que de les regarder comme des nombres au deſſous de zéro.

221. Ce ſigne eſt deſtiné à rappeler dans le calcul, que les logarithmes des fractions doivent être employés ſelon une règle toute oppoſée à celle que nous avons preſcrite pour les logarithmes des nombres entiers, ou des nombres entiers joints à des fractions; c'eſt-à-dire, que ſi on a à multiplier par une fraction, il faut retrancher le logarithme de cette fraction; ſi au contraire on a à diviſer par une fraction, il faut ajouter ſon logarithme.

La raiſon en eſt, pour la multiplication, que multiplier par une fraction, revient à multiplier par le numérateur, & à diviſer enſuite par le dénominateur; donc, lorſqu'on opère par logarithmes, on doit ajouter le logarithme du numérateur, & retrancher enſuite celui du dénominateur, ou, ce qui revient au même, on doit ſeulement retrancher l'excès du logarithme du dénominateur ſur le logarithme du numérateur : or cet excès eſt préciſément le logarithme de la fraction.

A l'égard de la diviſion, la raiſon en eſt auſſi facile à ſaiſir; en effet, diviſer par $\frac{1}{4}$, par exemple, revient (101) à multiplier par $\frac{4}{1}$, donc, en opérant par logarithmes, il faut ajouter le logarithme de $\frac{4}{1}$; c'eſt-à-dire, la différence du logarithme de 4, au logarithme de 3, ou du logarithme du dénominateur de la fraction propoſée au logarithme de ſon numérateur.

222. Si la fraction dont on veut avoir le logarithme, étoit en décimales, la queſtion ſe réduiroit à chercher le logarithme, comme ſi la fraction décimale propoſée n'avoit pas de virgule, & ayant retranché ce logarithme, d'autant d'unités qu'il a de chiffres décimaux, on feroit précéder le reſte, du ſigne —.

Par exemple, pour avoir le logarithme de 0,03, je cherche

celui de 3, qui eſt 0,477121; je le retranche de 2, & appliquant au reſte le ſigne —, j'ai — 1,522879 pour le logarithme de 0,03.

223. Il peut arriver, & il arrive aſſez ſouvent, qu'en convertiſſant en une ſeule fraction, l'entier & la fraction dont on cherche le logarithme, il peut arriver, dis-je, que le numérateur ſoit un nombre qui paſſe les limites des Tables.

Par exemple, ſi on demande le logarithme de $53\frac{821}{5704}$, ce nombre réduit en fraction revient à $\frac{303113}{5704}$, dont le numérateur paſſe les limites des Tables les plus étendues.

Il eſt donc à propos de ſavoir comment on peut trouver en général le logarithme d'un nombre qui paſſe ces limites.

La méthode que nous allons donner, n'eſt pas rigoureuſe, mais elle eſt plus que ſuffiſante pour les uſages ordinaires. Avant que de l'expoſer, obſervons ;

224. 1°. Qu'en ajoutant 1, 2, 3, &c. unités à la caractériſtique du logarithme d'un nombre, on multiplie ce nombre par 10, 100, 1000, &c. puiſque c'eſt ajouter le logarithme de 10, ou de 100, ou de 1000, &c. (202 & 211).

2°. Au contraire, ſi on retranche 1, 2, 3, &c. unités de la caractériſtique d'un logarithme, c'eſt diviſer le nombre correſpondant par 10, 100, 1000, &c.

225. Cela poſé, qu'il ſoit queſtion de trouver le logarithme de 357859, par exemple.

Je ſéparerai, par une virgule, ſur la droite de ce nombre, autant de chiffres qu'il eſt néceſſaire, pour que le reſte puiſſe ſe trouver dans les Tables (a) Ici, par exemple, j'en ſéparerai

(a) Nous ſuppoſons ici que l'on ait entre les mains des Tables ordinaires de logarithmes, qui aillent juſqu'à 10000, ou au moins juſqu'à 10000.

deux, ce qui me donnera 3578,59, qui eſt 100 fois plus petit que le nombre propoſé 357859.

Je cherche dans les Tables le logarithme de 3578, que je trouve être 3,5536403, je prends en même temps à côté de ce logarithme (a) la différence 1214, entre ce même logarithme & celui de 3579, après quoi je fais cette règle de trois. Si pour une unité de différence entre les deux nombres 3579 & 3578,

On a 1214 de différence entre leurs logarithmes,

Combien pour 0,59 différence entre les deux nombres 3578,59 & 3578,

Aura-t-on de différence entre leurs logarithmes ? c'eſt-à-dire, que je cherche le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers ſont.....

1 : 1214 : : 0,59 :

Ce quatrième terme eſt 716,26, ou ſimplement 716, en négligeant les décimales ; j'ajoute donc 716 au logarithme 3,5536403 de 3578, & j'ai 3,5537119 pour logarithme de 3578,59 : il ne s'agit plus, pour avoir celui de 357859, que d'ajouter deux unités à la caractériſtique du logarithme qu'on vient de trouver, & on aura 5,5537119 pour le logarithme cherché, puiſque 357859 eſt 100 fois plus grand que 3578,59.

Si les chiffres qu'on doit ſéparer ſur la droite étoient tous des zéros, après avoir trouvé dans les Tables le logarithme de la partie qui reſte à gauche, il n'y auroit autre choſe à faire, qu'à ajouter autant d'unités à la caractériſtique qu'on auroit ſéparé de zéros.

Des Logarithmes dont les Nombres ne ſe trouvent point dans les Tables.

226. Cette recherche n'eſt pas moins néceſſaire que la précédente. Par exemple, pour la diviſion, il arrive rarement que le quotient ſoit un nombre entier ; or, ſi l'on fait l'opération par logarithmes, on ne trouvera dans les tables, le logarithme reſtant, que quand le quotient ſera un nombre entier : il y a une infinité d'autres cas de la même eſpèce.

Celles de M. Rivard & celles de Feu M. l'Abbé de la Caille, ſont exactes & commodes.

(a) Ces différences ſe trouvent communément dans les Tables à côté des logarithmes mêmes.

227. Propoſons-nous d'abord de trouver à quel nombre répond un logarithme propoſé, ſoit qu'il excède les limites des Tables, ſoit qu'il tombe entre les logarithmes des Tables.

On retranchera de la caractériſtique autant d'unités qu'il ſera néceſſaire, pour qu'on puiſſe trouver, dans les Tables, les premiers chiffres du logarithme propoſé, ainſi préparé. Si tous les chiffres ſe trouvent alors dans les Tables, le nombre cherché ſera le nombre même qu'on trouve à côté dans les Tables, mais en mettant à ſa ſuite autant de zéros qu'on aura ôté d'unités à la caractériſtique.

Par exemple, le logarithme 7,2273467 ſe trouve (après avoir ôté trois unités à la caractériſtique) répondre exactement au nombre 16879; j'en conclus que le logarithme propoſé 7,2273467, répond à 16879000.

Si on ne trouve, dans les Tables, que les premiers chiffres du logarithme, on ſe conduira comme dans l'exemple qui ſuit.

Pour trouver à quel nombre appartient le logarithme 5,2432768, j'ôte deux unités à ſa caractériſtique; le logarithme 3,2432768 que j'ai alors, tombe entre les logarithmes de 1750 & 1751; le nombre auquel il répond eſt donc 1750 & une fraction.

Afin d'avoir cette fraction, je retranche de mon logarithme 3,2432768, le logarithme de 1750, & j'ai pour différence 2388.

Je prends auſſi dans les Tables, la différence 2481 entre les logarithmes de 1751 & 1750, après quoi je fais cette règle de Trois.

Si 2481 de différence entre les logarithmes de 1751 & 1750,
Répondent à 1 unité de différence entre ces nombres;
A quelle différence de nombres doit répondre la différence 2388 entre mon logarithme & celui de 1750?

Je trouve pour quatrième terme $\frac{2388}{2481}$; ainſi le logarithme 3,2432768 appartient au nombre $1750\frac{2388}{2481}$, à très-peu de choſe près; par conſéquent, le logarithme propoſé qui appartient à un nombre 100 fois plus grand, a pour nombre correſpondant $175000\frac{238800}{2481}$, c'eſt-à-dire $175096\frac{624}{2481}$, ou en réduiſant en décimales, il a pour nombre correſpondant 175096,25.

228. Si le logarithme propoſé tomboit entre ceux des Tables, il n'y auroit aucune unité à retrancher à la caractériſtique, & par conſéquent point de zéros à ajouter à la fin de l'opération, qu'on feroit d'ailleurs de la même manière.

229. Mais comme la proportion que nous employons dans cette méthode n'eſt pas rigoureuſement exacte *, & qu'elle n'approche de la vérité, qu'autant que les nombres cherchés ſont grands ; ſi le logarithme propoſé tomboit au-deſſous de celui de 1500, il faudroit, pour plus d'exactitude, ajouter à ſa caractériſtique autant d'unités qu'on pourroit le faire ſans paſſer les bornes des Tables ; & ayant trouvé le nombre qui approche le plus d'y répondre dans ces Tables, on en ſépareroit ſur la droite autant de chiffres par une virgule, qu'on auroit ajouté d'unités à la caractériſtique, ce qui ſuffira le plus ſouvent ; mais ſi l'on veut avoir plus de décimales, on fera la proportion comme ci-deſſus (227), & réduiſant le quatrième terme en décimales, on mettra celles-ci à la ſuite de celles qu'on a déjà trouvées.

Par exemple, ſi l'on demande à quel nombre appartient le logarithme 0,5432725 ; comme ce logarithme tombe entre ceux de 3 & de 4, & que le nombre auquel il appartient, eſt par conſéquent beaucoup au-deſſous de 1500, je cherche ce logarithme avec trois unités de plus à ſa caractériſtique ; c'eſt-à-dire, que je cherche 3,5432725 ; je trouve qu'il tombe entre les logarithmes de 3493 & 3494, d'où je conclus que le nombre cherché eſt 3,493, à moins d'un millième près. Mais ſi cette approximation ne ſuffit pas, je prendrai la différence entre mon logarithme & celui de 3493, c'eſt-à-dire 739 ; je prendrai pareillement la différence 1243 entre les logarithmes de 3494 & 3493, & je chercherai en raiſonnant comme ci-deſſus (227) le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci,

1243 : 1 : : 739 :

Ce quatrième terme évalué en décimales, eſt 0 594 ; donc le nombre cherché eſt 3,493594.

Au reſte, cette ſeconde approximation eſt bornée, parce que

* Cette proportion ſuppoſe que les différences des logarithmes ſont proportionnelles aux différences des nombres, ce qui n'eſt jamais exactement vrai, mais approche aſſez, quand les nombres ſont un peu grands, & cela ſuffit pour les uſages ordinaires.

les logarithmes des Tables n'étant exacts qu'à environ une demi-unité décimale du septième ordre près, les différences ſont affectées de ce léger défaut; mais on peut toujours pouſſer l'approximation avec confiance, juſqu'à trois décimales : au ſurplus, il eſt rare qu'on ait beſoin d'aller juſque-là; mais la remarque que nous faiſons, doit diriger auſſi dans l'uſage que nous avons fait ci-deſſus (225 & 227) de la même proportion.

230. Si on veut avoir la fraction à laquelle répond un logarithme négatif propoſé, on retranchera ce logarithme de 1, ou 2, ou 3, ou 4, &c. unités, ſelon l'étendue des Tables; & après avoir trouvé le nombre qui répond au logarithme reſtant, on en ſéparera ſur la droite, par une virgule, autant de chiffres qu'on aura employé d'unités pour retrancher le logarithme.

Par exemple, ſi on demande à quelle fraction appartient $-1,5327325,$, je retranche 1,5327325 de 4, & il me reſte 2,4672675, qui dans les Tables ſe trouve entre les logarithmes de 293 & de 294; j'en conclus que la fraction cherchée eſt entre 0,0293, & 0,0294; c'eſt-à-dire, qu'elle eſt 0,0293, à moins d'un dix-millième près. En effet, retrancher de 4 le logarithme propoſé 1,5327325, c'eſt (221) multiplier 10000 par la fraction à laquelle appartient ce même logarithme propoſé, ou (ce qui eſt la même choſe), c'eſt multiplier cette fraction par 10000; donc le nombre qu'on trouve eſt 10000 fois trop grand; il faut donc le compter pour des dix-millièmes.

Tout ce que nous venons de dire trouvera abondamment des applications par la ſuite. Bornons-nous quant à préſent à donner une idée, par quelques exemples, de l'avantage que les logarithmes procurent pour la facilité & la promptitude des calculs.

EXEMPLE I.

On demande le quotient de 17954 diviſé par 12836, approché juſqu'à un dix millième près.

Logarithme de 17954.....	4,2541612
Logarithme de 12836.....	4,1084297
Reſte.....	0,1457315

Ce reſte, cherché dans les Tables avec une caractériſtique plus forte de quatre unités, répond à 13987; donc le quotient cherché eſt 1,3987.

EXEMPLE II.

On demande la racine cubique de 53, à moins d'un millième près.

Le logarithme de 53 eſt..... 1,7242759
Son tiers (215) eſt..... 0,5747586

Ce dernier, cherché dans les Tables avec une caractériſtique plus forte de trois unités, répond à 3756; donc la racine cherchée eſt 3,756.

Pour juger de l'avantage des logarithmes, on n'a qu'à chercher cette racine par la méthode donnée (146).

EXEMPLE III.

On propoſe de multiplier 4,53 par 0,527.

(219) Log. 4,53..... 0,6560982
(222) Log. 0,527.....—0,2781894

donc (221)..... 0,3779088..... qui (227) eſt le log. de 2,38731.

Au reſte, dans cet exemple & ſes ſemblables, il eſt inutile d'avoir recours aux règles données (219 & 222). Il ſuffit d'ajouter enſemble les logarithmes des deux nombres propoſés, comme s'il n'y avoit pas de décimales, & ayant trouvé le nombre correſpondant, on en ſépare (54) autant de décimales qu'il y en avoit dans les deux facteurs.

EXEMPLE IV.

On demande quatre moyens proportionnels géométriques entre $2\frac{2}{3}$ & $5\frac{1}{4}$.

Il faudroit (199) pour avoir la raiſon qui doit régner dans la progreſſion, diviſer $5\frac{1}{4}$ par $2\frac{2}{3}$, & extraire la racine cinquième du quotient.

Par logarithmes, l'opération eſt beaucoup plus ſimple. Je détermine les logarithmes de $5\frac{1}{4}$ ou $\frac{21}{4}$, & de $2\frac{2}{3}$ ou $\frac{8}{3}$; je trouve 0,7596678 & 0,4259687. Je retranche ce dernier du premier (216), & je prends (215) le cinquième du reſte; j'ai 0,0667398 pour logarithme de la raiſon cherchée. Le nombre qui répond à ce logarithme, eſt 1,1661 à moins d'un dix-millième près. Ainſi pour avoir les moyens proportionnels demandés, il ne s'agit plus que de multiplier le premier terme $2\frac{2}{3}$, par 1,1661; puis le produit, par 1,1661; & ainſi de ſuite.

Mais on peut encore faire uſage des logarithmes pour exécuter promptement ces multiplications ; il ſuffit pour cela d'ajouter conſécutivement le logarithme trouvé de la raiſon, au logarithme auſſi trouvé du premier terme $2\frac{2}{3}$, & l'on aura les réſultats ſuivans,

		Moyens proport. correſpondans.
Log. $2\frac{2}{3}$.....	0,4259687	
Plus log. de la raiſon.....	0,4927085	3,109
Plus 2 fois log. de la raiſon...	0,5594483	3,626
Plus 3 fois log. de la raiſon...	0,6261881	4,218
Plus 4 fois log. de la raiſon...	0,6929279	4,931

Du Complément arithmétique, & de ſon uſage.

231. Lorſque dans une opération où l'on fait uſage des logarithmes, il s'en trouve quelques-uns qui doivent être retranchés, on peut ſimplifier l'opération par l'obſervation ſuivante.

Lorſqu'on a à retrancher un nombre quelconque, d'un autre qui eſt l'unité ſuivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans le premier ; l'opération ſe réduit à écrire la différence entre 9 & chacun des chiffres du nombre propoſé, à l'exception du dernier pour lequel on écrit la différence entre 10 & ce chiffre.

Par exemple, ſi j'ai 526927 à retrancher de 1000000 ; je retranche ſucceſſivement les chiffres 5, 2, 6, 9, 2, de 9 ; & le dernier chiffre 7, je le retranche de 10, & j'ai 473073 pour reſte.

Ce reſte eſt ce qu'on appelle le *complément arithmétique* du nombre propoſé.

La ſouſtraction faite de cette manière, étant trop ſimple pour pouvoir être comptée pour une opération, il s'enſuit que lorſqu'on aura à former un réſultat, de l'addition & de la ſouſtraction de pluſieurs nombres, on pourra toujours réduire l'opération à l'addition.

Par exemple, s'il s'agit d'ajouter les deux nombres 671736,

426452, & de retrancher de leur ſomme les deux nombres 432752, 18675 ; ce qui exige deux additions & une ſouſtraction, je ſubſtitue à cette opération, la ſuivante,

	672736
	426452
Complément arith. de 432752.....	567248
Complément arith. de 18675.....	981325
Somme.....	2647761

c'eſt-à-dire, que j'ajoute enſemble les deux premiers nombres propoſés, & les complémens arithmétiques des deux derniers ; la ſomme eſt 2647761. Il faut en ſupprimer le premier chiffre 2 ſur la gauche ; & les chiffres reſtans 647761 ſont le réſultat cherché.

La raiſon de cette opération eſt facile à appercevoir, en remarquant que ſi au lieu de retrancher 432752, comme on le propoſoit, j'ajoute ſon complément arithmétique, c'eſt-à-dire 1000000 moins 432752, je fais en même temps la ſouſtraction propoſée, & une augmentation de 1000000, c'eſt-à-dire d'une dixaine au premier chiffre du réſultat ; donc pour chaque complément arithmétique que j'aurai introduit, j'aurai une dixaine de trop à l'égard du premier chiffre du réſultat.

L'application de cela aux logarithmes eſt évidente.

EXEMPLE I.

Qu'il ſoit queſtion de diviſer 3760, par 79 ; il faudroit retrancher le logarithme de 79, de celui de 3760. Au lieu de cette opération j'écris

Log. 3760.....	3,5751878
Complément arith. du log. de 79.....	8,1023729
Somme.....	11,6775607

Ainſi 1,6775607 eſt le logarithme du quotient, & répond à 47,59 à moins d'un centième près.

EXEMPLE II.

S'agit-il de multiplier $\frac{675}{527}$ par $\frac{952}{377}$, il faudroit (97) multiplier 675 par 952, & 527 par 377, puis diviſer le premier produit par le ſecond. Par logarithmes, on opérera ainſi,

Log. 675.....	2,8293038
Log. 952.....	2,9786369
Complément arith. du log. de 527....	7,2781894
Complément arith. du log. de 377....	7,4236596
Somme.....	20,5097897

Le logarithme du produit eſt donc 0,5097897 qui cherché avec trois unités de plus à la caractériſtique, répond à 3,234.

On peut faire uſage du complément arithmétique, pour mettre les logarithmes des fractions, ſous la même forme que ceux des nombres entiers, & les employer de même dans le calcul. Par-là on évitera la diſtinction des logarithmes négatifs & des logarithmes poſitifs. Il ſuffira de ſe ſouvenir, que la caractériſtique du logarithme des fractions proprement dites, eſt trop forte de 10 unités.

Par exemple, pour avoir le logarithme de $\frac{3}{4}$, qui (89) n'eſt autre choſe que 3 diviſé par 4; au lieu de retrancher le logarithme de 4, de celui de 3; c'eſt-à-dire, de retrancher le logarithme de 3 de celui de 4, & donner (220) au reſte le ſigne —; au logarithme de 3, j'ajoute le complément arithmétique du logarithme de 4;

Log. 3.....	0,4771213
Complément arith. du log. de 4.....	9,3979400
Somme.....	9,8750613

Cette ſomme eſt le logarithme de $\frac{3}{4}$, dont la caractériſtique eſt trop forte de 10 unités. Or il n'eſt pas néceſſaire de faire actuellement la diminution; on peut la rejetter à la fin des opérations dans leſquelles on emploiera ce logarithme.

La même règle s'applique aux fractions décimales.

Ainſi pour avoir le logarithme de 0,575 qui n'eſt autre choſe que $\frac{575}{1000}$; au logarithme de 575, j'ajouterois le complément arithmétique du logarithme de 1000; ce qui, en général, ſe réduit à prendre le logarithme de la quantité décimale propoſée, comme s'il n'y avoit pas de virgule dans cette quantité, & ajouter à la caractériſtique de ce logarithme autant d'unités qu'il y a de différence entre 10, & le nombre des chiffres décimaux.

Dans le cas préſent, par exemple; à la caractériſtique du logarithme 2,7596678 du nombre 575, j'ajouterois 7, différence entre 10 & le nombre 3 des décimales de 0,575, & j'aurois 9,7596678 pour le logarithme de 0,575, la caractériſtique étant ſous-entendue trop forte de 10 unités.

En employant ainſi les complémens arithmétiques, au lieu des logarithmes négatifs des fractions, il n'en

n'en eſt pas plus difficile de trouver dans les Tables les valeurs en décimales de ces mêmes fractions. Dès que je ſaurai qu'un logarithme propoſé, eſt, ou renferme un ou pluſieurs complémens arithmétiques ; je ſais que ſa caractériſtique eſt trop forte d'autant de dixaines qu'il y entre de complémens arithmétiques ; ainſi ſi elle paſſe ce nombre de dixaines, il ſera facile de la diminuer, & de trouver le nombre auquel appartient ce logarithme, & qui ſera un nombre entier, ou un nombre entier joint à une fraction.

Mais ſi la caractériſtique eſt au-deſſous du nombre de dixaines qu'elle eſt cenſée renfermer de trop ; elle appartient certainement à une fraction que je trouverai en cette manière. Je chercherai, par ce qui a été dit (226 & ſuiv.), à quel nombre répond le logarithme propoſé, & lorſque je l'aurai trouvé, j'en ſéparerai, par une virgule, autant de dixaines de chiffres, ſur la droite, qu'il y aura de dixaines de trop dans la caractériſtique.

Par exemple, ſi l'on me donnoit 8,7322350 pour logarithme, réſultant d'une opération, dans laquelle il eſt entré un complément arithmétique : je vois, puiſque ſa caractériſtique eſt au-deſſous d'une dixaine, qu'il appartient à une fraction. Je cherche d'abord (227) à quel nombre répond 8,7322350, conſidéré comme logarithme de nombre entier ; je trouve qu'il répond à 539802600 ; ſéparant 10 chiffres, j'ai 0,0539802600 pour valeur très-approchée de la fraction qui répond au logarithme propoſé.

Mais comme il eſt très-rarement néceſſaire d'avoir ces fractions à un pareil degré de préciſion ; on abrègera, en diminuant tout de ſuite la caractériſtique du logarithme propoſé, autant qu'il eſt néceſſaire pour la faire tomber parmi celles des Tables, & prenant ſeulement le nombre correſpondant, on en ſéparera autant de chiffres de moins que ne preſcrit la règle précédente, autant de moins,

dis-je, qu'on aura ôté d'unités à la caractériſtique.

Ainſi, dans l'exemple que nous venons de donner, je diminuerois la caractériſtique de 5 unités, & ayant trouvé que le nombre correſpondant eſt 5398, j'en ſéparerois ſeulement 5 chiffres, & j'aurois 0,05398.

Dans les élévations aux puiſſances, il faudra obſerver qu'en multipliant (213) le logarithme par le nombre qui marque le dégré de la puiſſance, il ſe trouvera qu'on multipliera auſſi ce dont la caractériſtique ſe trouvera être trop forte; ainſi en élevant au cube, par exemple, s'il entre un complément arithmétique dans le logarithme propoſé; c'eſt-à-dire, ſi la caractériſtique eſt trop forte de 10 unités, celle du logarithme du cube, ſera trop forte de 30 unités, & ainſi des autres; il ſera donc facile de la ramener à ſa juſte valeur, ou d'en tenir compte.

Dans les extractions de racines, pour éviter toute mépriſe lorſqu'il entrera des complémens arithmétiques dans les logarithmes dont on fera uſage, on aura ſoin d'ajouter ou d'ôter à la caractériſtique, autant de dixaines qu'il eſt néceſſaire, pour que ce dont elle ſera trop forte, ſoit d'autant de dixaines qu'il y a d'unités dans le nombre qui marque le degré de la racine, & ayant, conformément à la règle ordinaire, diviſé par le nombre qui marque le degré de la racine, la caractériſtique ſera trop forte préciſément de 10 unités.

Par exemple, ſi l'on demande la racine cubique de $\frac{276}{547}$; au logarithme de 276, j'ajoute le complément arithmétique de celui de 547.. .....

Logarithme 276.....	2,4409091
complément arith. du log. de 547.....	7,2620125
Somme.....	9,7029218
à la caractériſtique de laquelle j'ajoute.....	20,.....
	29,7029218

Afin qu'elle devienne trop forte de 3 dixaines, & j'ai

29,70292 18, dont le tiers 9,9009739 eſt le logarithme de la racine cubique demandée, mais avec 10 unités de trop à la caractériſtique ; ainſi, conformément à ce qui a été obſervé ci-deſſus, je trouve que cette racine cubique eſt 0,7961, à moins d'un dix-millième près.

TABLE DES POIDS ET MESURES *employés dans l'Arithmétique, & des Caractères qui ſervent à les déſigner.*

Pour les Monnoies.

Caractères. *Subdiviſions.*

℔ ſignifie.....livre.

ſ.....ſou.

d.....denier.

	ſous.	deniers.
1 ſou.		12
1 livre.	20	240

Pour le Temps.

j ſignifie.....jour.

h.....heure.

'.....minute.

''.....ſeconde.

		ſecondes.
1 minute.		60
1 heure.	60	3600
1 jour.	24	1440	86400

Pour les Poids.

Poids de marc ou de Paris.

℔ ſignifie..... livre.
M..... marc.
O ou ℥ ..... once.
G ou ʒ ..... gros ou dragme.
D ou ℈ ..... denier ou ſcrupule.
G ..... grain.

					grains.
				1 denier.	24
			1 gros.	3	72
		1 once.	8	24	576
	1 marc.	8	64	192	4608
1 livre.	2	16	128	384	92

Poids Anglois de Troy.

On emploie ce poids en Angleterre pour les matières de petit volume & précieuſes ; l'once vaut 585 $\frac{1}{15}$ grains, poids de Paris.

				grains.
			1 ſcrupule.	20
		1 dragme.	3	60
	1 once.	8	24	480
1 livre.	12	96	288	5760

Poids Anglois, Avoir du poids.

On ſe ſert de ce poids en Angleterre pour les matières peſantes & de gros volume ; on l'emploie dans l'artillerie ; l'once vaut 533 $\frac{1}{2}$ grains, poids de Paris.

			dragmes.
		1 once.	16
	1 livre.	16	256
1 quintal.	112	1792	28672

Pour les Meſures des Longueurs.

t ſignifie.....	toiſe.
pi	pied.
po	pouce.
l	ligne.
pt	point.

				points.
			1 ligne.	12
		1 ponce.	12	144
	1 pied.	12	144	1728
1 toiſe.	6	72	864	10368

Chaque caſe de ces Tables, marque combien l'unité qui commence la même ligne horizontale, contient d'unités de

l'eſpèce de celle qui répond verticalement au-deſſus de cette même caſe.

Le pas ordinaire vaut.....	2 pieds $\frac{1}{2}$.
Le pas géométrique.....	5 pieds.
La braſſe.....	5 pieds.
L'aune de Paris.....	3 pi 7po 10$\frac{4}{5}$
Le pied de Roi étant diviſé en.....	1440 parties,
Le pied de Londres en contient.....	1351,7.
Le pied du Rhin,.....	1392,

ÉLÉMENS
DE GÉOMÉTRIE.

1. L'ESPACE que les corps occupent, a toujours les trois dimenſions, *Longueur*, *Largeur* & *Profondeur* ou *Epaiſſeur*.

Quoique ces trois dimenſions ſe trouvent toujours enſemble, dans tout ce qui eſt corps, néanmoins nous les ſéparons aſſez ſouvent par la penſée; c'eſt ainſi que, lorſque nous penſons à la profondeur d'une rivière, d'un foſſé, &c. nous ne ſommes point occupés de ſa longueur ni de ſa largeur; pareillement, quand nous voulons juger de la quantité de ſauciſſons qui entre dans la chemiſe d'une batterie, nous ne nous occupons que de ſa longueur & de ſa largeur, & point du tout de ſon épaiſſeur.

Nous diſtingueron̄s donc trois ſortes d'étendue; ſavoir :

L'étendue en longueur ſeulement, que nous appellerons *ligne*.

L'étendue en longueur & largeur ſeulement, que nous nommerons *ſurface* ou *ſuperficie*.

Enfin l'étendue en longueur, largeur & profondeur, que nous nommerons indifféremment, *volume*, *ſolide*, *corps*.

Nous examinerons ſucceſſivement les propriétés de ces trois ſortes d'étendue; c'eſt-là l'objet de la ſcience qu'on appelle *Géométrie*.

PREMIERE SECTION.

Des Lignes.

2. LES extrémités d'une ligne, ſe nomment des *points*. On appelle auſſi de ce nom, les endroits où une ligne eſt coupée; ou encore, ceux où des lignes ſe rencontrent.

On peut conſidérer le point comme une portion d'étendue qui auroit infiniment peu de longueur, de largeur & de profondeur.

La trace d'un point qui ſeroit mu de manière à tendre toujours vers un ſeul & même point, eſt ce qu'on appelle une *ligne droite*. C'eſt le plus court chemin pour aller d'un point à un autre; *AB* (*fig.* 1.) eſt une ligne droite.

On appelle, au contraire, *ligne courbe*, la trace d'un point qui, dans ſon mouvement, ſe détourne infiniment peu, à chaque pas.

On voit donc qu'il n'y a qu'une ſeule eſpèce de ligne droite, mais qu'il y a une infinité d'eſpèces de courbes différentes.

Les lignes, droites ou courbes, que nous pouvons tracer ſur le papier ou ſur toute autre ſurface, ne peuvent être ſans quelque largeur, parce que le crayon, la plume, ou en général l'inſtrument dont nous nous ſervons n'eſt jamais terminé par une pointe que l'on puiſſe regarder comme n'ayant ni longueur ni largeur. Auſſi ces lignes ne doivent-elles être regardées que comme la repréſentation des lignes proprement dites.

3. Pour tracer une ligne droite d'une étendue médiocre, comme lorſqu'il s'agit de conduire par les deux points *A* & *B* (*fig.* 1) une ligne droite, ſur le papier; on ſait qu'on emploie une règle qu'on applique ſur les deux points *A* & *B*, ou très-près, & à diſtances égales de ces deux points, & avec un crayon ou

une plume qu'on fait gliſſer le long de cette règle, on trace la ligne *AB*.

Mais lorſqu'il s'agit de tracer une ligne un peu grande, on fixe au point *A* l'extrémité d'une ficelle que l'on frotte avec un morceau de craie ; & appliquant un autre de ſes points, ſur le point *B*, on pince la ficelle pour l'élever au-deſſus de *AB*, & la laiſſant aller, elle marque, en s'appliquant ſur la ſurface, une trace qui eſt la ligne droite dont il s'agit.

Quand il eſt queſtion d'une ligne fort grande, mais dont les extrémités peuvent être vues l'une de l'autre ; on ſe contente de marquer entre ſes deux extrémités, un certain nombre de points de cette ligne. Par exemple, lorſqu'on veut prendre des alignemens ſur le terrein, on place à l'une des extrémités *B* (*fig.* 2.) un bâton ou jallon *BD*, que par le moyen d'un fil à-plomb, on rend le plus vertical que faire ſe peut ; on en fixe un autre de la même manière au point *A* ; & ſe plaçant à ce même point *A*, on fait placer ſucceſſivement pluſieurs autres jallons, à différens points, *C*, *C*, &c. entre *A* & *B*, de manière qu'appliquant l'œil le plus près qu'il eſt poſſible du jallon *AD*, & regardant le jallon *BD*, celui *CD* dont il s'agit, paroiſſe confondu avec *BD* ; alors tous les points *C*, *C*, *C*, &c. déterminés de cette manière, ſont dans l'alignement *AB*.

On s'y prendroit d'une manière ſemblable s'il s'agiſſoit de prolonger la ligne droite *AB*.

Quand les deux extrémités *A* & *B* ne ſont pas viſibles l'une de l'autre, on a recours à des moyens que nous enſeignerons par la ſuite.

4. Les lignes ſe meſurent par d'autres lignes ; mais, en général, la meſure commune des lignes, c'eſt la ligne droite. Meſurer une ligne droite ou courbe, ou une diſtance quelconque, c'eſt chercher combien de fois cette ligne, ou cette diſtance, contient une ligne droite connue & déterminée, que l'on conſidère alors comme unité. Cette unité eſt abſolument arbitraire. Auſſi y a-t-il bien des eſpèces de meſures différentes en fait de lignes. On trouvera, à la fin de ce volume, une table de celles qu'il eſt le plus néceſſaire de connoître.

5. Pour faciliter l'intelligence de ce que nous avons à dire ſur les lignes, nous ſuppoſerons que

les figures dans lesquelles nous les considérons : ſont tracées ſur une ſurface *plane*. On appelle ainſi une ſurface à laquelle on peut appliquer exactement une ligne droite, dans tous les ſens.

6. De toutes les lignes courbes, nous ne conſidérerons dans ces Elémens, que *la circonférence du Cercle*. On appelle ainſi une ligne courbe *BCFDG* (*fig.* 3) dont tous les points ſont également éloignés d'un même point *A*, pris dans le plan ſur lequel elle eſt tracée. Le point *A* ſe nomme le *Centre*; les lignes droites *AB*, *AC*, *AF*, &c. qui vont de ce point à la circonférence, ſe nomment *rayons*; & tous ces rayons ſont égaux, puiſqu'ils meſurent la diſtance du centre à chaque point de la circonférence.

Les lignes, comme *BD*, qui paſſant par le centre, ſe terminent de part & d'autre à la circonférence, ſont appellées *diamètres*; comme chaque diamètre eſt compoſé de deux rayons, tous les diamètres ſont donc égaux. Il eſt d'ailleurs évident que tout diamètre partage la circonférence en deux parties parfaitement égales; car ſi l'on conçoit la figure pliée de façon que le pli ſoit dans le diamètre *BD*, tous les points de *BGD* doivent s'appliquer ſur *BCED*, ſans quoi il y auroit des points de la circonférence qui ſeroient inégalement éloignés du centre.

Les portions *BC*, *CE*, *ED*, &c. de la circonférence, ſe nomment *arcs*; & ce qu'on appelle *cercle*, c'eſt la ſurface même renfermée par la circonférence *BCFDGB*.

Une droite, comme *DF*, qui va de l'extrémité *D* d'un arc, à l'autre extrémité *F*, s'appelle *corde* ou *ſoutendante* de cet arc.

7. Il eſt aiſé de voir que *les cordes égales d'un*

même cercle ou de cercles égaux, soutendent des arcs égaux, & réciproquement. Car si la corde *DG* est égale à la corde *DF*, en imaginant qu'on transporte la corde *DG* & son arc, pour appliquer la corde *DG* sur la corde *DF*, il est visible que le point *D* étant commun, & le point G tombant alors sur le point *F*, tous les points de l'arc *DG* doivent tomber sur l'arc *DF*, puisque si quelqu'un de ces points ne tomboit pas sur l'arc *DF*, l'arc *DG* n'auroit pas tous ses points également éloignés du centre *A*.

8. On est convenu de partager toute circonférence de cercle, grande ou petite, en 360 parties égales auxquelles on a donné le nom de *degrés*. On partage le degré en 60 parties égales qu'on appelle *minutes*; chaque minute en 60 parties égales qu'on appelle *secondes*; & de toujours subdiviser de 60 en 60, en donnant aux parties, consécutivement, les noms *minutes*, *secondes*, *tierces*, *quartes*, *quintes*, &c.

La marque du degré est celle-ci.....	d ou °
Celle de la minute.....	′
De la seconde.....	″
De la tierce.....	‴
De la quarte.....	iv

Ainsi pour marquer 3 degrés 24 minutes 55 secondes, on écrit $3^{d}\ 24'\ 55''$.

Des Angles & de leur Mesure.

9. Deux lignes *AB*, *AC* qui se rencontrent, peuvent former entr'elles une ouverture plus ou moins grande, comme on le voit dans les *figures* 4, 6 & 7.

Cette ouverture *BAC*, est ce qu'on appelle un *angle*; & cet angle est dit angle *rectiligne*, ou *curviligne*, ou *mixtiligne*, selon que les lignes qui le comprennent sont, ou toutes deux lignes droites,

ou toutes deux lignes courbes, ou l'une, une ligne droite, & l'autre une ligne courbe.

Nous ne parlons, pour le préſent, que des angles rectilignes.

10. Pour ſe former une idée exacte d'un angle, il faut concevoir que la ligne droite *AB* étoit d'abord couchée ſur *AC*, & qu'on l'a fait tourner ſur le point *A* (comme une branche de compas ſur ſa charnière), pour l'amener dans la poſition *AB* qu'elle a actuellement. La quantité dont *AB* a tourné, eſt préciſément ce qu'on appelle un *angle*.

D'après cette idée, on conçoit que la grandeur d'un angle ne dépend point de celle de ſes côtés; en ſorte que l'angle formé par les lignes *AC*, *AB* (*fig.* 4), eſt abſolument le même que celui que forment les lignes *AF* & *AE*, qui ſont une extenſion de celles-là; en effet la ligne *AB* & la ligne *AE* ont dû tourner chacune de la même quantité, pour venir dans leur poſition actuelle.

Le point *A* où ſe rencontrent les deux lignes *AB*, *AC*, s'appelle le *ſommet de l'angle*, & les deux lignes *AB*, *AC*, en ſont les côtés.

Pour déſigner un angle, nous emploierons trois lettres, dont l'une marque le ſommet, & les deux autres ſont placées le long des côtés; & en énonçant ces lettres, nous placerons toujours celle du ſommet au milieu, ainſi, pour déſigner l'angle compris par les deux lignes *AB*, *AC*, nous dirons l'angle *BAC* ou *CAB*.

Cette attention eſt principalement néceſſaire lorſque pluſieurs angles ont leur ſommet au même point, car ſi dans la *fig.* 4, par exemple, on diſoit ſimplement l'angle *A*, on ne ſauroit ſi l'on veut parler de l'angle *BAC*, ou de l'angle *BAD*, mais lorſqu'il n'y a qu'un ſeul angle, comme dans la *figure* 5, on peut dire ſimplement l'angle *a*; c'eſt-à-dire, le déſigner par la lettre de ſon ſommet.

11. Puiſque l'angle *BAC* (*fig.* 4), n'eſt autre

choſe que la quantité dont le côté *AB* auroit dû tourner ſur le point *A*, pour venir de la poſition *AC* dans la poſition *AB*, & que dans ce mouvement chaque point de *AB*, le point *B*, par exemple, reſtant toujours également éloigné de *A*, décrit néceſſairement un arc de cercle, qui augmente ou diminue préciſément dans le même rapport que l'angle augmente ou diminue; il eſt naturel de prendre cet arc pour meſure de l'angle; mais comme chaque point de *AB* décrit un arc de longueur différente, ce n'eſt point la longueur même de l'arc qu'il faut prendre, mais le nombre de ſes degrés & parties de degré, qui ſera toujours le même pour chaque arc décrit par chaque point de *AB*, puiſque tous ces points commençant continuant & finiſſant leur mouvement dans le même temps, font néceſſairement le même nombre de pas; toute la différence qu'il y a, c'eſt que les points les plus éloignés du point *A*, font des pas plus grands. Nous pouvons donc dire que.....

12. *Un angle quelconque* BAC (fig. 4), *a pour meſure le nombre des degrés & parties de degré, de l'arc compris entre ſes côtés, & décrit de ſon ſommet comme centre.*

Ainſi, quand par la ſuite nous dirons, un tel angle a pour meſure un tel arc; on doit entendre qu'il a pour meſure le nombre des degrés & parties de degré de cet arc.

13. Donc, *pour diviſer un angle en pluſieurs parties égales*, il ne s'agit que de diviſer l'arc qui lui ſert de meſure, en autant de parties égales, & de tirer par les points de diviſion, des lignes au ſommet de cet angle. Nous parlerons plus bas de la diviſion des arcs.

14. Et *pour faire un angle égal à un autre*; par exemple, pour faire au point *a* de la ligne *ac* (*fig.* 5), un angle égal à l'angle *BAC* (*fig.* 4), il faut, d'une ouverture de compas

arbitraire, & du point *a* comme centre, décrire un arc indéfini *cb*; poſant enſuite la pointe du compas ſur le ſommet *A* de l'angle donné *BAC*, on décrira, de la même ouverture, l'arc *BC* compris entre les deux côtés de cet angle, & ayant pris avec le compas, la diſtance de *C* à *B*, on la portera de *c* en *b*, ce qui donnera le point *b* par lequel, & par le point *a* tirant la ligne *ab*, on aura l'angle *bac* égal à *BAC*.

En effet l'angle *bac* a pour meſure *bc* (12) & l'angle *BAC* a pour meſure *BC*. Or ces deux arcs ſont égaux, puiſqu'appartenant à des cercles égaux, ils ont d'ailleurs des cordes égales (7); car la diſtance de *b* à *c*, a été faite la même que celle de *B* à *C*.

15. L'angle *BAC* (*fig.* 6) ſe nomme angle *droit*, lorſque l'un *AB* de ſes côtés ne penche ni vers l'autre côté *AC*, ni vers ſon prolongement *AD*.

On l'appelle angle *aigu* (*fig.* 4) lorſque l'un *AB* de ſes côtés penche plus vers l'autre côté *AC*, que vers ſon prolongement *AD*.

Enfin on l'appelle *obtus* (*fig.* 7) lorſqu'un côté *AB* penche plus vers le prolongement de l'autre côté *AC*, que vers ce côté même.

16. Concluons de ce qui a été dit (12) ſur la meſure des angles, 1°. qu'*un angle droit a pour meſure* 90^d; *un angle aigu, moins que* 90^d; *& un angle obtus, plus que* 90^d.

Car ſi la ligne *AE* (*fig.* 3). ne penche ni vers *AB*, ni vers ſon prolongement *AD*, les deux angles *BAE*, *DAE* ſeront égaux; donc les arcs *BE* & *DE*, qui leur ſervent de meſure, ſeront auſſi égaux; or ces deux arcs compoſant enſemble la demi-circonférence, valent enſemble 180^d; donc chacun d'eux eſt de 90^d; donc auſſi les deux angles *BAE*, *DAE* ſont chacun de 90^d.

D'après cela il eſt évident que *BAC* eſt de moins, & *BAF* de plus que 90^d.

17. 2°. *Les deux angles* BAC, BAD, (fig. 4, 6 & 7) *que forme une ligne droite* AB *tombant ſur une autre droite* CD, *valent toujours enſemble* 180d. Car on peut toujours regarder le point *A* (*fig.* 4) comme le centre d'un cercle, dont *CD* eſt alors un diamètre : or les deux angles *BAC* & *BAD* ont pour meſure les deux arcs *BC* & *BD* qui compoſent la demi-circonférence ; ils valent donc enſemble 180d, ou autant que deux angles droits.

18. 3°. *Que ſi d'un même point* A (fig. 3) *on tire tant de droites* AC, AE, AF, AD, AG, &c. *qu'on voudra ; tous les angles* BAC, CAE, EAF, FAD, DAG, GAB, *qu'elles comprennent, ne feront jamais que* 360d : car ils ne peuvent occuper plus que la circonférence.

19. Deux angles tels que *BAC* & *BAD* (*fig.* 4) qui pris enſemble font 180 degrés, ſont dits *ſupplément* l'un de l'autre ; ainſi *BAC* eſt le ſupplément de *BAD*, & *BAD* eſt le ſupplément de *BAC* ; parce que l'un de ces angles eſt ce qu'il faudroit ajouter à l'autre pour faire 180 degrés.

Les angles égaux auront donc des ſupplémens égaux ; & ceux qui auront des ſupplémens égaux, ſeront égaux.

20. Concluons de-là *que les angles* BAC, EAD (fig. 8) *oppoſés au ſommet, & formés par les deux droites* BD & EC, *ſont égaux.*

Car *BAC* a pour ſupplément *CAD*, & *EAD* a auſſi pour ſupplément *CAD*.

21. On appelle *complément* d'un angle ou d'un arc, ce dont cet arc eſt plus petit ou plus grand

que 90 degrés. Ainſi (*fig.* 3) l'angle *BAC* a pour complément *CAE*; l'angle *BAF* a pour complément *FAE*. Le complément eſt donc ce qu'il faut ajouter à un angle, ou ce qu'il en faut retrancher, pour qu'il vaille 90 degrés.

Les angles aigus qui auront des complémens égaux, ſeront donc égaux, & réciproquement; il en ſera de même des angles obtus.

On rencontre ſans ceſſe les angles, tant dans la théorie que dans la pratique. C'eſt par les angles qu'on détermine les poſitions des objets les uns à l'égard des autres; les angles flanqués, les angles d'épaule & de courtine, ſervent à déterminer la poſition des différentes lignes d'un front de fortification. Le tir du canon eſt réglé par l'angle que la ligne de mire fait avec le prolongement de l'axe de la pièce.

Les inſtruments qui ſervent à meſurer les angles, ou à former des angles tels qu'on le juge à propos, ſont en aſſez grand nombre; nous ne ferons connoître ici, que le *rapporteur*; on trouvera la deſcription de ceux qui peuvent avoir rapport à notre objet, ſur la fin de ce volume, à la Trigonométrie.

12. L'inſtrument repréſenté par la *figure* 9, & qu'on appelle *Rapporteur*, ſert à meſurer les angles ſur le papier, & à former ſur le papier les angles dont on peut avoir beſoin. L'uſage en eſt commode & fréquent. C'eſt un demi-cercle de cuivre ou de corne, diviſé en 180 degrés. Le centre de cet inſtrument eſt marqué par une petite échancrure C. Quand on veut meſurer un angle tel que *BAC* (*fig.* 4, 6 & 7) on applique le centre *C* ſur le ſommet *A* de l'angle qu'on veut meſurer, & le rayon *CB* du même inſtrument, ſur l'un *AC* des côtés de cet angle; alors le côté *AB* prolongé, s'il eſt néceſſaire, fait connoître par celle des diviſions de l'inſtrument, par laquelle il paſſe, de combien de degrés eſt l'arc du rapporteur compris entre les côtés de l'angle *BAC*, & par conſéquent (11) de combien de degrés eſt cet angle *BAC*.

Pour faire, avec le même inſtrument, un angle d'un nombre déterminé de degrés; on applique le rayon *CB* de l'inſtrument ſur la ligne qui doit ſervir de côté à l'angle qu'on veut former, & de manière que le centre *C* ſoit ſur le point où cet angle doit avoir ſon ſommet; puis cherchant ſur les diviſions de l'inſtrument, le nombre de degrés en queſtion, on marque ſur le papier, un point en cet endroit; par ce point & par le ſommet,

on

On tire une ligne droite qui fait alors avec la première, l'angle demandé.

Des Perpendiculaires & des Obliques.

23. Nous avons dit (15) que la ligne *A B* (*fig.* 6) qui ne penche ni vers *AC*, ni vers *AD*, formoit avec ces deux parties des angles qu'on appelle *droits*.

Cette même ligne *AB* eſt auſſi ce qu'on appelle *une Perpendiculaire* à la ligne *AC* ou *DC*, ou *AD*.

D'après cette définition, on doit regarder comme vérités évidentes, les trois propoſitions ſuivantes.

24. 1°. *Quand une ligne* A B (fig. 10) *eſt perpendiculaire ſur une autre ligne* C D, *celle-ci eſt auſſi perpendiculaire ſur la ligne* A B.

Car lorſque *AB* eſt perpendiculaire ſur *CD*, les angles *AEC*, *AED* ſont égaux ; or *AED* eſt égal à *BEC* (20) ; donc *AEC* eſt égal à *BEC* ; donc la ligne *CE* ou *CD* ne penche ni vers *AE*, ni vers *BE* ; donc elle eſt perpendiculaire à *AB*.

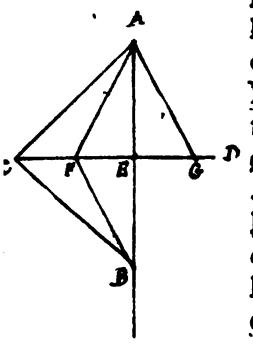
25. 2°. *D'un même point* E *pris dans une ligne* C D, *on ne peut élever qu'une ſeule perpendiculaire à cette ligne.*

26. 3°. *Et d'un même point* A, *pris hors d'une ligne* CD, *on ne peut abaiſſer qu'une ſeule perpendiculaire à cette ligne.*

Car on conçoit qu'il n'y a qu'un ſeul cas où une ligne paſſant par le point *E* ou par le point *A*, puiſſe ne pencher ni vers *ED*, ni vers *EC*.

27. *Les lignes qui partant du point* A *s'écarteront également de la perpendiculaire, ſeront egales ; & plus*

ces lignes s'écarteront de la perpendiculaire, plus elles seront longues, & par conſequent la perpendiculaire eſt la plus courte de toutes.



Suppoſons que EG ſoit égale à EF; ſi l'on renverſe la figure AEG ſur la figure AEF, la ligne AE reſtant commune à toutes les deux, il eſt clair qu'à cauſe de l'angle AEG égal à AEF, la ligne EG s'appliquera ſur EF, & que le point G tombera ſur le point F, puiſque EG eſt ſuppoſé égal à EF; donc AG s'appliquera exactement ſur AF; donc ces deux lignes ſont égales. Quant à la ſeconde partie de la propoſition, il eſt évident que le point C de la ligne CE, étant ſuppoſé plus loin de AB, que le point F de la même ligne CE, eſt néceſſairement plus éloigné de tel point de AB qu'on voudra, que le point F ne peut l'être du même point; donc AC eſt plus grande que AF; donc auſſi la perpendiculaire eſt la plus courte de toutes.

$AC + CB > AF + FB$
$\frac{1}{2}AC > \frac{1}{2}AF$
$AC > AF$

28. Les lignes AF, AC, AG, ſont dites *obliques* à l'égard de la perpendiculaire AE & de la ligne CD; & en général, une ligne eſt oblique à une autre, quand elle fait, avec cette autre, un angle ou aigu ou obtus.

$AF + FB > AE + EB$
$\frac{1}{2}AF > \frac{1}{2}AE$
$AF > AE$

29. Puiſque (27) les obliques AF, AG ſont égales lorſqu'elles s'éloignent également de la perpendiculaire, il faut en conclure, que *lorſqu'une ligne eſt perpendiculaire ſur le milieu* E *d'une autre ligne* FG, *chacun de ſes points eſt autant éloigné de l'extrémité* F, *que de l'extrémité* G; car il eſt évident que ce qu'on a dit du point A s'applique également à tout autre point de la ligne AE ou AB.

30. Il n'eſt pas moins évident qu'*il n'y a que les*

points de la perpendiculaire A E *ſur le milieu de* F G, *qui puiſſent être également éloignés de* F *&* G; car tout point qui ſera à droite ou à gauche de la perpendiculaire, eſt évidemment plus près de l'un de ces points, que de l'autre.

Donc pour qu'une ligne ſoit perpendiculaire ſur une autre, il ſuffit qu'elle paſſe par deux points dont chacun ſoit également éloigné de deux points pris dans cette autre.

31. Concluons de-là 1°. que *pour élever une perpendiculaire ſur le milieu d'une ligne* A B (*fig.* 11), il faut poſer une pointe du compas en *B*, & d'une ouverture plus grande que la moitié de *A B*, tracer un arc *I K*; poſer enſuite la pointe du compas en *A*, & de la même ouverture, tracer un arc *L M*, qui coupe le premier au point *C*, qui ſera également éloigné de *A* & de *B*. On déterminera enſuite, de la même manière, un autre point *D*, ſoit au-deſſous, ſoit au-deſſus de *A B*, & en prenant la même ou une autre ouverture de compas. Enfin on tirera par les deux points *C* & *D* la ligne *C D*, qui (30) ſera perpendiculaire ſur le milieu de *A B*.

32. 2°. *Si d'un point* E, *pris hors de la ligne* A B (fig. 12), *on veut mener une perpendiculaire à cette ligne*, on placera la pointe du compas en *E*, & d'une ouverture plus grande que la plus courte diſtance à la ligne *A B*, on tracera avec l'autre pointe deux petits arcs qui coupent *A B* aux points *C* & *D*; puis de ces deux points comme centres, & d'une ouverture de compas plus grande que la moitié de *C D*, on tracera deux arcs qui ſe coupent en un point *F*, par lequel & par le point *E*, on tirera la ligne *E F*, qui ſera perpendiculaire ſur *A B* (30), puiſqu'elle aura deux points *E* & *F* également éloignés, chacun, des deux points *C* & *D* de la ligne *A B*.

33. Si le point *E*, par lequel on veut que la perpendiculaire paſſe, étoit ſur la ligne même *A B*, on opéreroit encore de la même manière : *voyez figure* 13.

Enfin ſi le point *E* étoit tellement placé, qu'on ne pût marquer commodément qu'un des deux points *C* ou *D*, on prolongeroit la ligne *A B*, & on opéreroit encore de même : *voyez figures* 14 & 15. La *figure* 15 eſt pour le cas où l'on veut élever une perpendiculaire à l'extrémité de la ligne *A B*.

34. Lorſqu'on a pluſieurs perpendiculaires à tracer ; pour abréger & pour éviter en même temps la confuſion qui pourroit naître de la multitude des traits dont il faudroit alors charger le deſſin, on emploie un inſtrument, conſtruit & vérifié d'après les méthodes précédentes ; c'eſt l'équerre qui eſt formée, tantôt de deux règles perpendiculaires l'une à l'autre, & aſſemblées par une charnière, pour pouvoir être pliées l'une ſur l'autre lorſqu'on n'en fait point uſage, tantôt d'une ſeule pièce de bois ou de cuivre, dont deux côtés ſont perpendiculaires l'un à l'autre. On applique une des règles ou l'un des côtés de l'équerre ſur la ligne propoſée, en obſervant de faire gliſſer ce côté juſqu'à ce que le ſecond paſſe par le point donné ; alors faiſant gliſſer le crayon ou la plume le long du ſecond côté de l'équerre, on a la perpendiculaire demandée.

35. Sur le terrein où l'on opère en grand, on ſubſtitue au compas, des perches ou des cordeaux ; mais quand on fait uſage de ces derniers, il faut avoir l'attention de leur donner la même tenſion autant qu'il eſt poſſible, pendant la même opération. Pour donner une idée de la manière dont on les emploie, ſuppoſons qu'il s'agiſſe de placer le heurtoir d'une batterie (*figure 16*).

Comme c'eſt la pièce contre laquelle les roues de l'affût doivent porter quand on met le canon en batterie, elle doit être perpendiculaire à la ligne du tir, & par conſéquent à la ligne du milieu de l'embrâſure.

Pour lui donner cette diſpoſition, on tracera ſur ſa ſurface, & parallèlement à ſa longueur, une ligne EC, ſur laquelle on prendra arbitrairement les parties égales AB, AC, & l'on placera le point A ſur la ligne du tir ; ayant fixé aux points B & C deux cordeaux d'égale longueur, on fera tourner le heurtoir ſur le point A, juſqu'à ce que leurs extrémités puiſſent ſe réunir en un même point D ſur la ligne du tir. Le heurtoir BC ſera perpendiculaire à la ligne du tir.

Des Parallèles.

36. Deux lignes droites, tracées ſur un même plan, ſont dites *parallèles*, lorſqu'elles ne peuvent jamais ſe rencontrer, à quelque diſtance qu'on les imagine prolongées.

Deux lignes parallèles ne font donc point d'angle entr'elles.

Donc, *deux parallèles ſont par-tout également éloignées l'une de l'autre ;* c'eſt-à-dire que la perpendiculaire menée entr'elles, eſt par-tout la même ; car il eſt évident que ſi en quelqu'endroit elles ſe trouvoient plus près qu'en un autre, elles ſeroient inclinés l'une à l'autre, & par conſéquent elles pourroient enfin ſe rencontrer.

D'après ces notions, il eſt aiſé d'établir les cinq propoſitions ſuivantes.

37. 1°. *Lorſque deux lignes parallèles* A B & C D (fig. 17), *ſont coupées par une troiſième ligne* E F, *qu'on appelle alors* ſécante) *les angles* BGE, DHE, *ou* AGH, CHF, *qu'elles forment d'un même côté, avec cette ligne, ſont égaux ;* car les lignes *AB* & *CD*, n'ayant aucune inclinaiſon entre elles (36), doivent néceſſairement être également inclinées d'un même côté, chacune à l'égard de toute ligne à laquelle on les comparera.

38. 2°. *Les angles* AGH, GHD *ſont égaux.* Car on vient de voir que *AGH* eſt égal à *CHF ;* or *CHF* (20) eſt égal à *GHD ;* donc *AGH* eſt égal à *GHD.*

39. 3°. *Les angles* BGE, CHF *ſont égaux.* Car *BGE* eſt égal à *AGH* (20) ; or on a vu (37) que *AGH* eſt égal à *CHF ;* donc *BGE* eſt égal à *CHF.*

40. 4°. *Les angles* BGH, DHG, *ou* AGH, CHG, *ſont ſupplément l'un de l'autre.* Car *BGH* eſt ſupplément de *BGE*, qui (37) eſt égal à *DHG.*

41. 5°. *Les angles* BGE, DHF, *ou* AGE, CHF, *ſont ſupplément l'un de l'autre ;* car *DHF* a pour ſupplément *DHG*, qui (37) eſt égal à *BGE.*

42. Chacune de ces cinq propriétés a toujours lieu, lorſque deux lignes parallèles ſont rencontrées par une troiſième ; & réciproquement *toutes les fois que deux lignes droites, auront dans leur rencontre avec une troiſième, l'une quelconque de ces cinq propriétés, on doit conclure qu'elles ſont parallèles*, cela ſe démontre d'une manière abſolument ſemblable.

On a donné aux angles dont nous venons d'examiner les propriétés, des noms qui peuvent ſervir à fixer ces propriétés dans la mémoire. Les angles *BGE*, *FHC* ſe nomment *alternes externes*, parce qu'ils ſont de différens côtés de la ligne *EF*, & qu'ils ſont tous deux hors des parallèles. Les angles *AGH*, *GHD*, s'appellent *alternes internes*, parce qu'ils ſont de différens côtés de la ligne *EF*, & tous deux entre les parallèles. Les angles *BGH*, *DHG* s'appellent *internes, d'un même côté*, parce qu'ils ſont entre les parallèles, & d'un même côté de la ſécante *EF*. Enfin les angles *BGE*, *DHF*, ſe nomment *externes d'un même côté*, parce qu'ils ſont hors des parallèles & d'un même côté de la ſécante.

43. Des propriétés que nous venons de démontrer, on peut conclure, *que ſi deux angles* ABC, DEF (fig. 18), *tournés d'un même côté, ont leurs côtés parallèles, ils ſeront égaux*. Car ſi l'on imagine le côté *DE* prolongé juſqu'à ce qu'il rencontre *BC* en *G*, les angles *ABC*, *DGC*, ſeront égaux (37), & par la même raiſon l'angle *DGC* ſera égal à l'angle *DEF* ; donc *ABC* eſt égal à *DEF*.

44. De ces mêmes propriétés on peut auſſi conclure, que *pour mener, par un point donné* C, *une ligne* CD, (fig. 19) *parallèle à une ligne* AB ; il faut, par le point C, tirer arbitrairement la ligne indéfinie *CEF*, qui coupe *AB* en un point quelconque *E* ; mener ſelon ce qui a été enſeigné (14), par le point C, la ligne *CD*, qui faſſe avec *CE*, l'angle *ECD* égal à l'angle *FEB* que celle-ci fait avec *AB* ; la ligne *CD* tirée de cette manière, ſera parallèle à *AB* (37).

45. Lorſqu'on a pluſieurs parallèles à mener, on peut, pour abréger, & pour éviter la multitude des traits, faire de l'équerre l'uſage ſuivant.

On placera un côté de l'équerre ſur la droite donnée, & tenant l'autre côté appliqué contre une règle immobile, on fera gliſſer l'équerre le long de cette règle, juſqu'à ce que le premier côté paſſe par le point donné; la ligne tracée le long de ce même côté ſera la parallèle demandée.

46. Sur le terrein, pour mener une parallèle à une ligne donnée, on s'y prend aſſez communément, en faiſant en ſorte que les deux lignes ſoient toutes deux perpendiculaires à une troiſième; c'eſt ainſi que ſi l'on demandoit (*fig.* 20) de mener une parallèle à l'une des faces d'un baſtion, & à une diſtance de 200 toiſes, on prendroit ſur le prolongement de la face de ce baſtion un point *F*, duquel on éleveroit ſur ce prolongement même une perpendiculaire *F A* longue de 200 toiſes; & à l'extrémité de celle-ci, on éleveroit une perpendiculaire *A B*, qui ſeroit la parallèle demandée.

Au reſte chacune des cinq propriétés établies ci-deſſus, peut fournir une manière de mener une parallèle.

Des lignes droites conſidérées par rapport à la circonférence du Cercle, & des circonférences de Cercle conſidérées les unes à l'égard des autres.

47. La courbure uniforme du cercle met en droit de conclure, ſans qu'il ſoit beſoin d'en donner une démonſtration rigoureuſe.....

1°. Que *une ligne droite ne peut rencontrer une circonférence en plus de deux points.*

2°. Que *dans un demi-cercle, la plus grande corde ſoutend toujours le plus grand arc, & réciproquement.*

On appelle en général, *ſécante* (*fig.* 21), toute ligne, comme *D E*, qui rencontre le cercle en deux points & qui eſt en partie au dehors; & on

appelle *tangente*, celle qui ne fait que s'appliquer contre la circonférence ; telle eſt *AB*.

48. *Une tangente ne peut rencontrer la circonférence qu'en un ſeul point.* Car ſi elle la rencontroit en deux points, elle entreroit dans le cercle, puiſque de ces deux points il ſeroit poſſible de tirer au centre deux rayons ou lignes égales, entre leſquelles ont peut toujours concevoir une perpendiculaire ſur la ligne qui joint ces deux points ; & comme cette perpendiculaire (27) eſt plus courte que chacun des deux rayons, on voit que la tangente auroit des points plus près du centre que ceux où elle rencontre le cercle, elle entreroit donc dans le cercle ; ce qui eſt contre la définition que nous venons d'en donner.

La tangente n'ayant qu'un point de commun avec le cercle, il s'enſuit que le rayon *CA* (*fig.* 22) qui va au point d'attouchement, eſt la plus courte ligne qu'on puiſſe tirer du centre à la tangente ; que par conſéquent (27) il eſt perpendiculaire à la tangente. Donc réciproquement *la tangente en un point quelconque* A *du cercle, eſt perpendiculaire à l'extrémité du rayon* CA, *qui paſſe par ce point.*

49. On voit donc que *pour mener une tangente en un point donné* A *ſur le cercle*, il faut tirer à ce point un rayon *CA*, & mener à ſon extrémité une perpendiculaire, ſuivant la méthode donnée (33).

50. Donc *ſi pluſieurs cercles* (fig. 23) *ont leurs centres ſur la même ligne droite* CA, *& paſſent tous par le même point* A, *ils auront tous pour tangente commune la ligne* TG *perpendiculaire à* CA, *& ſe toucheront par conſéquent tous.*

51. Ainſi *pour décrire un cercle d'une grandeur déterminée, & qui touche un cercle donné* BAD (fig. 24) *en un point*

donné A, il faut, par le centre C & par le point A, tirer le rayon CA, qu'on prolongera indéfiniment; puis du point A vers T ou vers V (selon qu'on voudra que l'un des cercles embraſſe l'autre ou ne l'embraſſe point) porter la grandeur du rayon du ſecond cercle; après quoi du centre T ou V, & du rayon TA ou VA, on décrira la circonférence EF.

52. *La perpendiculaire élevée ſur le milieu d'une corde, paſſe toujours par le centre du cercle, & par le milieu de l'arc ſoutendu par cette corde* (fig. 25).

Car elle doit paſſer par tous les points également éloignés des extrémités A & B (30), or il eſt évident que le centre eſt également éloigné des deux extrémités A & B qui ſont deux points de la circonférence, donc elle paſſe par le centre.

Il n'eſt pas moins évident qu'elle doit paſſer par le milieu de l'arc; car ſi E eſt le milieu de l'arc, les arcs égaux AE, BE, ayant des cordes égales (7), le point E eſt également éloigné de A & de B; donc la perpendiculaire doit paſſer par le point E.

53. Le centre, le milieu de l'arc, & le milieu de la corde, étant tous trois ſur une même ligne droite, toutes les fois qu'une ligne droite paſſera par deux de ces trois points, on pourra conclure qu'elle paſſe par le troiſième.

Et comme on ne peut mener qu'une ſeule perpendiculaire ſur le milieu de la corde, on doit encore conclure que ſi une perpendiculaire ſur une corde, paſſe par l'un quelconque de ces trois points, elle paſſe néceſſairement par les deux autres.

De ces propriétés on peut conclure,

54. 1°. *Le moyen de diviſer un angle ou un arc en deux parties égales.*

Pour diviſer l'angle BAC (*fig.* 26) en deux parties égales,

on décrira de ſon ſommet *A* comme centre, & d'un rayon arbitraire, l'arc *DE*; puis des points *D* & *E* pris ſucceſſivement pour centres, & d'un même rayon, on tracera deux arcs qui ſe coupent en un point *G*, par lequel & par le point *A* on tirera *AG* qui (30) étant perpendiculaire ſur le milieu de la corde *DE*, diviſera en deux parties égales l'arc *DIE* (52), & par conſéquent auſſi l'angle *BAC*, puiſque les deux angles partiels *BAG*, *CAG*, ont (12) pour meſure les deux arcs égaux *DI*, *EI*.

55. 2°. *Le moyen de faire paſſer une circonférence de cercle par trois points donnés qui ne ſoient pas en ligne droite.*

Soient *A*, *B*, *C*, (*fig.* 27) ces trois points; en tirant les lignes droites *AB*, *BC*, elles ſeront deux cordes du cercle qu'il s'agit de décrire.

Elevez une perpendiculaire (31) ſur le milieu de *AB*, faites la même choſe ſur le milieu de *BC*; le point *I* où ſe couperont ces deux perpendiculaires, ſera le centre. Car ce centre doit être ſur *DE* (52), & par la même raiſon il doit être ſur *FG*; il doit donc être à leur rencontre *I*, qui eſt le ſeul point commun qu'aient ces deux lignes.

56. S'il étoit queſtion de *retrouver le centre d'un cercle ou d'un arc déja décrit*, on voit donc qu'il n'y auroit qu'à marquer trois points à volonté ſur cet arc, & opérer comme on vient de l'enſeigner.

57. Puiſqu'on ne trouve qu'un ſeul point *I*, qui ſatisfaſſe à la queſtion, il faut en conclure, que par trois points donnés, on ne peut faire paſſer qu'un ſeul cercle, & par conſéquent que *deux circonférences de cercle ne peuvent ſe rencontrer en trois points ſans ſe confondre.*

58. 3°. *Le moyen de faire paſſer par un point donné* B, (fig. 28 & 29) *une circonférence de cercle, qui en touche une autre, dans un point donné* A.

Il faut, par le centre C de la circonférence donnée, & par le point *A*, où l'on veut qu'elle ſoit touchée, tirer le rayon *CA*; qu'on prolongera de part ou d'autre, ſelon qu'il ſera néceſſaire; joindre le point *A* au point *B*, par lequel on veut que paſſe la circonférence cherchée, & élever ſur le milieu de *AB* une perpendiculaire *MN*, qui coupera *AC* ou ſon prolongement en *D*. Ce point *D* ſera le centre, & *AD* ou *BD* ſera le rayon du cercle demandé, car puiſque la circonférence qu'on veut décrire doit paſſer par le point *A* & par le point *B*, ſon centre

doit être sur *MN* (52); d'ailleurs, puisque cette même circonférence doit toucher en *A*, son centre doit être sur *CA* (50) ou sur son prolongement; il est donc au point d'intersection de *CA* & de *MN*.

59. Si au lieu d'une circonférence c'étoit une ligne droite qu'il s'agit de faire toucher en un point donné *A*, (*fig.* 30), par un cercle passant par un point donné *B*, l'opération seroit la même, avec cette seule différence que la ligne *AC* seroit une perpendiculaire élevée au point *A* sur cette droite.

60. 4°. *Deux cordes parallèles* AB, CD, (fig. 31) *interceptent, entre elles, des arcs égaux* AC, BD.

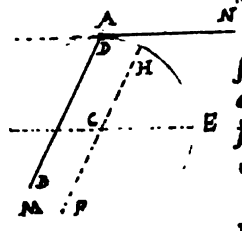
Car la perpendiculaire *GI* qu'on abaisseroit du centre *G* sur *AB*, doit (52) diviser, en deux parties égales, chacun des deux arcs *AIB*, *CID*, puisqu'elle sera, en même temps, perpendiculaire sur *AB*, & sur sa parallèle *CD*; donc si des arcs égaux *AI*, *BI*, on retranche les arcs égaux *CI*, *DI*, les arcs restans *AC*, *BD*, doivent être égaux.

Concluons delà, que quand une tangente *HK* est parallèle à une corde *AB*, le point d'attouchement *I* est précisément au milieu de l'arc *AIB*.

61. Les propositions que nous avons établies (50, 58 & 59) ont leur application dans la fortification & dans le tracé des bouches à feu, & de plusieurs attirails d'artillerie; il y est souvent question d'arcs qui doivent se toucher, ou toucher des lignes droites, & passer par des points donnés.

Des Angles considérés dans le cercle.

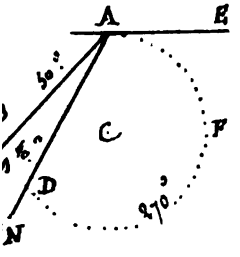
62. Nous avons vu ci-dessus (12) quelle est, en général, la mesure des angles. Ce que nous nous proposons ici, n'est point de donner une nouvelle manière de les mesurer, mais d'exposer quelques propriétés qui peuvent nous être fort utiles par la suite, tant pour exécuter certaines opérations, que pour faciliter quelques démonstrations.



63. *Un angle* MAN (fig. 32 & 33), *qui a ſon ſommet à la circonférence, & qui eſt formé par deux cordes, ou par une tangente & par une corde, a toujours pour meſure la moitié de l'arc* BFED *compris entre ſes côtés.*

Si le centre C eſt entre les côtés de l'angle, menez par le centre C, le diamètre *FH* parallèle au côté *AM*, & le diametre *GE* parallèle au côté *AN*; l'angle *MAN* (43) eſt égal à l'angle *FCE*; il aura donc la même meſure que celui-ci, qui a ſon ſommet au centre, c'eſt-à-dire, qu'il aura pour meſure l'arc *FE*; il ne s'agit donc que de faire voir que l'arc *FE* eſt la moitié de l'arc *BFED*. Or *BF* eſt égal à *AH* (60), à cauſe des parallèles *AM*, *HF*; & à cauſe des parallèles *AN* & *GE*, l'arc *ED* eſt égal à *AG*; donc *ED* plus *BF*, vàlent *AG* plus *AH*, c'eſt-à-dire *GH*; mais *GH*, comme meſure de l'angle *GCH*, doit être égal à *FE*, meſure de l'angle *FCE*, qui (20) eſt égal à *GCH*; donc *BF* plus *ED*, valent *FE*; donc *FE* eſt la moitié de *BFED*; donc l'angle *MAN* a pour meſure la moitié de l'arc *BFED* qu'il comprend entre ſes côtés.

FE = GA + AH
FE = AE + BF
AE + BF + FE = BFEHD.
2FE = BFEHD
FE = BFEHD / 2.



Mais ſi le centre étoit hors des côtés, comme il arrive pour l'angle *MAN* (*fig.* 37), il n'en ſeroit pas moins vrai que cet angle auroit pour meſure la moitié de l'arc *BD* compris entre ſes côtés. Car en imaginant la tangence *AE*, l'angle *MAN* vaut *MAE* moins *NAE*; il a donc pour meſure la différence des meſures de ces deux angles; c'eſt-à-dire, (puiſque le centre eſt entre leurs côtés), la moitié de *BFA* moins la moitié de *DFA* ou la moitié de *BD*.

½ BD = ½ BFA − ½ DFA
20° = 155° − 135°
ou bien
BD = BFA − DFA
40° = 310° − 270°.

64. Donc, 1°. *tous les angles* BAE, BCE, BDE, (fig. 34), *qui ayant leur ſommet à la*

circonférence, comprendront entre leurs côtés, le même arc ou des arcs égaux, ſeront égaux. Car ils auront chacun pour meſure la moitié du même arc BE (63).

65. 2°. *Tout angle* BAC (fig. 35) *qui aura ſon ſommet à la circonférence, & dont les côtés paſſeront par les extrémités d'un diamètre, ſera droit ou de* 90 degrés ; car il comprendra alors entre ſes côtés la demi-circonférence BOC, qui eſt de 180 degrés ; & comme il doit en avoir la moitié pour meſure (63), il ſera donc de 90 degrés.

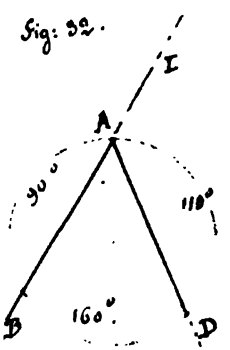
66. La propoſition qu'on vient de démontrer (65) peut, entre pluſieurs autres uſages, avoir les deux ſuivans.

67. 1°. *Pour élever une perpendiculaire à l'extrémité* B *d'une ligne* FB (fig. 36), lorſqu'on ne peut prolonger aſſez cette ligne, pour exécuter commodément ce qui a été enſeigné (33) ; voici le procédé :

D'un point D pris à volonté hors de la ligne FB, & d'une ouverture égale à la diſtance DB, décrivez la circonférence $ABCH$ qui coupe FB en quelque point A ; par ce point & par le centre D, tirez le diamètre ADC ; du point C où ce diamètre coupe la circonférence, menez au point B la ligne CB, elle ſera perpendiculaire à FB. Car l'angle CBA qu'elle forme avec FB, a ſon ſommet à la circonférence, & ſes côtés paſſent par les extrémités du diamètre AC ; cet angle eſt donc droit (65) ; donc CB eſt perpendiculaire ſur FB.

68. 2°. *Pour mener d'un point donné* E, (fig. 38), *hors du cercle* ABD *une tangente à la circonférence de ce cercle.* Joignez le centre C & le point E par la droite CE : décrivez ſur CE, comme diamètre, la circonférence $CAED$; elle coupera la circonférence ABD, en deux points A & D, par chacun deſquels & par le point E, tirant les lignes DE & AE, vous aurez les deux tangentes qu'on peut mener du point E à la circonférence ABD.

Pour ſe convaincre que ces lignes ſont tangentes, il n'y a qu'à tirer les rayons CD & CA ; les deux angles CDE, CAE, ont chacun leur ſommet à la circonférence $ACDE$, & les deux côtés de chacun paſſent par les extrémités du diamètre CE ;



donc (65) ces angles ſont droits ; donc DE & AE ſont perpendiculaires à l'extrémité des rayons CD & CA ; donc (49) ces lignes ſont tangentes en D & en A.

69. Si l'on prolonge le côté BA (*fig.* 32) indéfiniment vers I, on aura un angle NAI, qui aura auſſi ſon ſommet à la circonférence ; cet angle qui n'eſt point formé par deux cordes, mais ſeulement par une corde & par le prolongement d'une autre corde, n'aura point pour meſure la moitié de l'arc AD compris entre ſes côtés, mais la moitié de la ſomme des deux arcs AD & AB ſoutendus par le côté AD & par le côté IA prolongé ; car DAI valant avec DAB, deux angles droit, ces deux angles doivent avoir enſemble pour meſure la moitié de la circonférence ; or on vient de voir (63) que DAB avoit pour meſure la moitié de DB ; donc DAI a pour meſure la moitié de AD & la moitié de AB.

$DAI + DAB = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BD$

$DAI + DAB - DAB$

$55° + 45° + 80° - 80°$

$BAI = 100°$.

70. *Un angle* BAC (fig. 39), *qui a ſon ſommet entre le centre & la circonférence, a pour meſure la moitié de l'arc* BC *compris entre ſes côtés, plus la moitié de l'arc* DE *compris entre ces mêmes côtés prolongés.*

Du point D où CA prolongé, rencontre la circonférence, tirez DF parallèle à AB ; l'angle BAC eſt égal à FDC (37), & aura par conſéquent la même meſure que celui-ci, c'eſt-à-dire, la moitié de l'arc FBC (63), ou la moitié de BC plus la moitié de BF, ou, à cauſe que (60) BF eſt égal à DE, la moitié de BC plus la moitié de DE.

71. *Un angle* BAC (fig. 40), *qui a ſon ſommet hors du cercle, a pour meſure la moitié de l'arc concave* BC *moins la moitié de l'arc convexe* ED *compris entre ſes côtés.*

Du point D où CA rencontre la circonférence, tirez DF parallèle à AB.

L'angle BAC eſt égal à FDC (37); il aura donc même meſure que celui ci, c'eſt-à-dire, la moitié de CF, ou la moitié de CB moins la moitié de BF, ou (à cauſe que BF eſt (60) égal à ED) la moitié de GB moins la moitié de ED.

72. On voit donc que quand les côtés d'un angle interceptent un arc de circonférence, ſi cet angle a pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés, il a néceſſairement ſon ſommet à la circonférence; car s'il l'avoit ailleurs, les propoſitions démontrées (70 & 71) feroient voir qu'il n'a point la moitié de cet arc pour meſure. Donc, de quelque façon qu'on poſe un même angle, ſi ſes côtés (*fig.* 34) paſſent toujours par les mêmes points B & E de la circonférence, ſon ſommet ſera toujours ſur quelque point de la circonférence. Donc, ſi deux règles AM, AN (*fig.* 41) fixément attachées l'une à l'autre, roulent enſemble dans un même plan, en touchant continuellement deux points fixes B & C, le ſommet A décrira la circonférence d'un cercle qui paſſera par les deux points B & C.

Ceci peut ſervir, 1°. à *décrire un cercle qui paſſe par trois points donnés* B, A, C (*fig.* 41), *lorſqu'on ne peut approcher du centre.* Il faudra joindre le point A aux deux points B & C par deux règles AM, AN: Fixer ces deux règles de manière qu'elles ne puiſſent s'écarter l'une de l'autre: alors en faiſant mouvoir l'angle BAC de manière que les règles AM, AN touchent toujours les points B & C, le ſommet A décrira la circonférence demandée.

2°. *A décrire un arc de cercle d'un nombre de degrés propoſé, & qui paſſe par deux points donnés* B & C; ce qui peut être néceſſaire dans la pratique.

Pour cet effet, on retranchera de 360 degrés, le nombre des degrés que cet arc doit avoir, & ayant pris la moitié du reſte, on ouvrira les deux règles, de manière qu'elles faſſent un angle égal à cette moitié. Fixant alors les deux règles l'une à l'autre, & les faiſant tourner autour de deux pointes fixées en B & C, l'arc BAC que le ſommet décrira dans ce mouvement, ſera du nombre de degrés propoſé.

Il eſt facile de voir pourquoi on fait l'angle BAC égal à la moitié du reſte; c'eſt qu'il a pour meſure la moitié de BC qui eſt la différence entre la circonférence entière & l'arc BAC.

Des Lignes droites qui renferment un eſpace.

73. Le moindre nombre des lignes droites qu'on puiſſe employer pour renfermer un eſpace, eſt trois ; & alors cet eſpace ſe nomme *triangle rectiligne* ou ſimplement *triangle*. *A B C* (*fig.* 42) eſt un triangle, parce que c'eſt un eſpace renfermé par trois lignes droites, ou plus exactement, parce que c'eſt une figure qui n'a que trois angles.

Il eſt évident que dans tout triangle, la ſomme de deux côtés, pris comme on le voudra, eſt toujours plus grande que le troiſième. *A B* plus *B C*, par exemple, valent plus que *A C*, parce que *A C* étant la ligne droite qui va de *A* à *C*, eſt le plus court chemin pour aller d'un de ces points à l'autre.

Un triangle, dont les trois côtés ſont égaux, ſe nomme triangle *équilatéral*, (*fig.* 44).

Celui dont deux côtés ſeulement ſont égaux, ſe nomme triangle *iſoſcèle*, (*fig.* 45).

Et celui, dont les trois côtés ſont inégaux, ſe nomme triangle *ſcalène*, (*fig.* 43).

74. *La ſomme des trois angles de tout triangle rectiligne, vaut deux angles droits ou* 180d.

Prolongez indéfiniment le côté *A C* vers *E* (*fig.* 43), & concevez la ligne *C D* parallèle au côté *A B*.

L'angle *B A C* eſt égal à l'angle *D C E* (37), puiſque les lignes *A B* & *C D* ſont parallèles. L'angle *A B C* eſt égal à l'angle *B C D* par la ſeconde propriété des parallèles (38) ; donc les deux angles *B A C* & *A B C*, valent enſemble autant que les deux angles *B C D* & *D C E*, c'eſt-à-dire, autant que l'angle *B C E* ; mais *B C E* eſt ſupplément (17 & 19) de *B C A* ; donc les deux angles *B A C* & *A B C* forment enſemble le ſupplément de *B C A* ;

donc

donc ces trois angles valent enſemble 180d.

75. La démonſtration que nous venons de donner, prouve donc en même temps que *l'angle extérieur* BCE *d'un triangle* ABC, *vaut la ſomme des deux intérieurs* BAC, ABC, *qui lui ſont oppoſés.*

Concluons de ce qu'on vient de dire (74);

1°. *qu'un triangle rectiligne ne peut avoir qu'un ſeul angle qui ſoit droit :* & alors on l'appelle *triangle rectangle*, (*fig.* 46).

2°. Qu'à plus forte raiſon *il ne peut avoir qu'un ſeul angle qui ſoit obtus ;* dans ce cas on l'appelle *triangle obtuſangle*, (*fig.* 47).

3°. Mais *il peut avoir tous ſes angles aigus ;* & alors il eſt dit *triangle acutangle*, (*fig.* 45).

4°. Que *connoiſſant deux angles ou ſeulement la ſomme de deux angles d'un triangle, on connoît le troiſième angle*, en retranchant de 180d, la ſomme des deux angles connus.

5°. Que *lorſque deux angles d'un triangle ſont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troiſième angle de chacun eſt néceſſairement égal* : puiſque les trois angles de chaque triangle valent 180d.

6°. Que *les deux angles aigus d'un triangle rectangle ſont toujours complément* (21) *l'un de l'autre.* Car dès que l'un des angles du triangle eſt de 90d, il ne reſte plus que 90d pour les deux autres enſemble.

76. Nous avons vu ci-deſſus (55) qu'on pouvoit toujours faire paſſer une circonférence de cercle, par trois points qui ne ſont pas en ligne droite ; concluons-en que.....

On peut toujours faire paſſer une circonférence de cercle, par les ſommets des trois angles d'un triangle. On appelle cela *circonſcrire un cercle à un triangle.*

77. De là il eſt aiſé de conclure, 1°. que *ſi deux angles d'un triangle ſont égaux ; les côtés qui leur ſont oppoſés ſeront auſſi égaux ;* & réciproquement *ſi deux côtés d'un triangle ſont égaux, les angles oppoſés à ces côtés ſeront égaux.*

Car en faiſant paſſer une circonférence par les trois angles *A*, *B*, *C* (*fig.* 48), ſi les angles *ABC*, *ACB*, ſont égaux, les arcs *ADC*, *AEB*, dont les moitiés leur ſervent de meſure (63), ſeront néceſſairement égaux; donc (7) les cordes *AC*, *AB* ſeront égales. Et réciproquement, ſi les côtés *AC*, *AB* ſont égaux, les arcs *ADC*, *AEB* ſeront égaux; donc les angles *ABC*, *ACB*, qui ont pour meſure la moitié de ces arcs, ſeront égaux.

Donc les trois angles d'un triangle équilatéral ſont égaux, & valent, par conſéquent, chacun le tiers de 180^d ou 60^d.

78. 2°. *Dans un même triangle* ABC (fig. 49): *le plus grand côté eſt oppoſé au plus grand angle, le plus petit côté au plus petit angle, & réciproquement.*

Car ſi l'angle *ABC* eſt plus grand que l'angle *ACB*, l'arc *AC* ſera plus grand que l'arc *AB*, & par conſéquent la corde *AC* plus grande que la corde *AB*. La réciproque ſe démontre de même.

De l'égalité des Triangles.

79. Il y a pluſieurs propoſitions dont la démonſtration eſt fondée ſur l'egalité de certains triangles qu'on y conſidère; il eſt donc à propos d'établir ici les caractères auxquels on peut reconnoître cette égalité. Ils ſont au nombre de trois.

80. *Deux triangles ſont parfaitement égaux quand*

Ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.

Que l'angle *B* du triangle *BAC* (*fig.* 50), ſoit égal à l'angle *E* du triangle *EDF*; que le côté *AB* ſoit égal au côté *DE*, & le côté *BC* égal au côté *EF*; voici comment on peut ſe convaincre que ces deux triangles ſont égaux.

Concevez la figure *ABC* appliquée ſur la figure *DEF*, de manière que le côté *AB* ſoit exactement appliqué ſur ſon égal *DE*; puiſque l'angle *B* eſt égal à l'angle *E*, le côté *BC* tombera ſur *EF*; & le point *C* tombera ſur le point *F*, puiſque *BC* eſt ſuppoſé égal à *EF*. Le point *A* étant ſur *D*, & le point *C* ſur *F*, il eſt donc évident que *AC* s'applique exactement ſur *DF*, & que par conſéquent les deux triangles conviennent parfaitement.

Donc pour conſtruire un triangle dont on connoîtroit deux côtés & l'angle compris, on tirera (*fig.* 50) une ligne *DE* égale à l'un des côtés connus : ſur cette ligne on fera (14) un angle *DEF* égal à l'angle connu, & ayant fait *EF* égal au ſecond côté connu, on tirera *DF*, ce qui achevera le triangle demandé.

81. *Deux triangles ſont parfaitement égaux, quand ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.*

Que le côté *AB* (*fig.* 50) ſoit égal au côté *DE*, l'angle *B* égal à l'angle *E*, & l'angle *A* égal à l'angle *D*.

Concevez le côté *AB* appliqué exactement ſur le côté *DE*; *BC* ſe couchera ſur *EF*, puiſque l'angle *B* eſt égal à l'angle *E*; pareillement, puiſque l'angle *A* eſt égal à l'angle *D*, le côté *AC* ſe couchera ſur *DF*; donc *AC* & *BC* ſe rencontreront au point *F*; donc les deux triangles ſont égaux.

Donc pour conſtruire un triangle, dont on connoîtroit un côté & les deux angles adjacens, on tirera (*fig.* 50), une ligne *DE*

égale au côté connu; aux extrémités de cette ligne, on fera (14) les angles E & D égaux aux deux angles connus; alors les côtés EF, DF de ces angles termineront, par leur rencontre, le triangle demandé.

82. La propoſition (81) peut ſervir à démontrer que *les parties* AC, BD (fig. 51) *de deux parallèles interceptées entre deux autres parallèles* AB, CD, *ſont égales.*

Abaiſſez les deux perpendiculaires *AE*, *BF*; les angles *AEC*, *BFD* ſont égaux, puiſqu'ils ſont droits; & à cauſe des parallèles *AC* & *BD*, *AE* & *BF*; l'angle *EAC* eſt égal à l'angle *FBD* (43). D'ailleurs *AE* eſt égal à *BF* (36); donc les deux triangles *AEC*, *BFD* ſont égaux, puiſqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc *AC* eſt égal à *BD*.

On démontrera de même, que ſi *AC* eſt égal & parallèle à *BD*, *AB* ſera égal & parallèle à *CD*; car outre le côté *AC* égal à *BD*, & l'angle droit en *E* ainſi qu'en *F*, l'angle *ACE* ſera égal à *BDF*; puiſque *AC* eſt parallèle à *BD* (38); donc (75) le troiſième angle *EAC* ſera égal au troiſième angle *DBF*; donc les deux triangles auront un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc ils ſeront égaux; donc *AE* eſt égal à *BF*, & par conſéquent les deux lignes ſont parallèles; or de-là & de ce qu'on vient de démontrer (82), il s'enſuit que *AB* eſt égal à *CD*.

83. *Deux triangles ſont parfaitement égaux lorſqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun*

Que le côté *AB* (*fig.* 50 ſoit égal au côté *DE*, le côté *BC*, égal au côté *EF*; & le côté *AC*, égal au côté *DF*.

Concevez le côté *AB* exactement appliqué ſur

DE, & le plan BAC couché ſur le plan de la figure EDF; je dis que le point C tombe ſur le point F.

Décrivez des points D & E comme centres, & des rayons DF & EF, les deux arcs IK & HG qui ſe coupent en F; il eſt évident que le point C doit tomber ſur quelque point de IK, puiſque AC eſt égal à DF; par une ſemblable raiſon le point C doit tomber ſur quelque point de GH, puiſque BC eſt égal à EF; il doit donc tomber ſur le point F qui eſt le ſeul point commun que ces deux arcs puiſſent avoir d'un même côté de DE; donc les deux triangles conviennent parfaitement, & ſont par conſéquent égaux.

Donc pour conſtruire un triangle dont on connoîtroit les trois côtés, il faut (*fig.* 50) tirer une droite DE égale à l'un des côtés connus : du point D comme centre, & d'un rayon égal au ſecond côté connu, décrire l'arc IK; pareillement du point E, comme centre, & d'un rayon égal au troiſième côté connu, décrire l'arc GH; enfin du point d'interſection F, tirer aux points D & E, les droites FD & FE.

Des Polygones.

84. Une figure de pluſieurs côtés, s'appelle en général un *Polygone*.

Lorſqu'elle a trois côtés; on l'appelle.

Lorſqu'elle en a
- .....*Triangle* ou *Trilatère*.
- 4.....*Quadrilatère*.
- 5.....*Pentagone*.
- 6.....*Hexagone*.
- 7.....*Heptagone*.
- 8.....*Octogone*.
- 9.....*Ennéagone*.
- 10.....*Décagone*.
- 11.....*Endécagone*.
- 12.....*Dodécagone*.

Nous n'étendons pas davantage la liſte de ces

noms, parce qu'une figure eſt auſſi bien déſignée en énonçant le nombre de ſes côtés, qu'en employant ces différens noms, dont le grand nombre chargeroit aſſez inutilement la mémoire; nous n'expoſons ceux-ci que parce qu'ils ſe rencontrent plus fréquemment que les autres.

On appelle angle *ſaillant*, celui dont le ſommet eſt hors de la figure; la *figure* 52 a tous ſes angles ſaillans.

L'angle *rentrant* eſt, au contraire, celui dont le ſommet entre dans la figure; l'angle *CDE* (*fig.* 53) eſt un angle rentrant.

Les propriétés des Polygones ont une application aſſez fréquente dans la fortification. Les termes d'*angle ſaillant*, *angle rentrant*, y ſont pareillement appliqués aux angles du chemin couvert & des lignes de retranchement.

On appelle *diagonale*, une ligne tirée d'un angle à un autre, dans une figure quelconque. *AD*, *AC* (*fig* 52) ſont des diagonales.

85. *Tout polygone peut être partagé par des diagonales menées d'un de ſes angles, en autant de triangles moins deux, qu'il a de côtés.*

L'inſpection des *figures* 52 & 53, ſuffit pour faire ſentir que cela eſt vrai généralement.

86. Donc *pour avoir la ſomme de tous les angles intérieurs d'un polygone quelconque, il faut prendre* 180^{d}, *autant de fois moins deux, qu'il y a de côtés.*

Car il eſt évident que la ſomme des angles intérieurs des polygones *ABCDE* (*fig.* 52), & *BCDEF* (*fig.* 53), eſt la même que celle des angles des triangles *ABC*, *ACD*, &c. Or la ſomme des trois angles de chacun de ces triangles eſt de 180 degrés; il faut donc prendre 180 degrés autant de fois qu'il y a de triangles, c'eſt-à-dire (85)

autant de fois moins deux, qu'il y a de côtés.

Dans la *figure* 53 l'angle *CDE*, pour être compris dans la propoſition précédente, doit être compté, non pas pour la partie *CDE* extérieure au polygone, mais pour la partie *CDE* compoſée des angles *ADE*, *ADC*; c'eſt un angle de plus de 180 degrés, & qu'on ne doit pas moins conſidérer comme angle, que tout autre angle au-deſſous de 180 degrés. Car un angle n'eſt en général (10) que la quantité dont une ligne a tourné autour d'un point fixe.

87. *Si l'on prolonge, dans le même ſens, tous les côtés d'un polygone qui n'a point d'angles rentrans, la ſomme de tous les angles extérieurs vaudra* 360 *degrés, quelque nombre de côtés qu'ait le polygone.* Voyez (*fig.* 52).

Car chaque angle extérieur eſt le ſupplément de l'angle intérieur qui lui eſt contigu; ainſi les angles, tant intérieurs qu'extérieurs, valent autant de fois, 180 degrés qu'il y a de côtés; mais (86) les intérieurs ne différent de cette ſomme, que de deux fois 180 degrés ou 360 degrés; il reſte donc 360 degrés pour les angles extérieurs.

88. On appelle polygone *régulier*, celui qui a tous ſes angles égaux, & tous ſes côtés égaux. *Voyez* (*fig.* 54).

Il eſt donc toujours facile de ſavoir combien vaut chaque angle intérieur d'un polygone régulier; car ayant trouvé par la propoſition enſeignée (86) combien valent enſemble tous les angles intérieurs, il n'y aura qu'à diviſer cette valeur totale, par le nombre des côtés; par exemple, ſi l'on demande combien vaut chaque angle intérieur d'un pentagone régulier; comme il y a 5 côtés, je prends 180 degrés, 5 fois moins deux, c'eſt-à-dire, 3 fois; ce qui donne 540 degrés pour la valeur des 5 angles intérieurs; donc, puiſqu'ils ſont tous égaux, chacun doit valoir la cinquième partie de 540 degrés, c'eſt-à-dire, 108 degrés.

89. De la définition du polygone régulier, il ſuit

qu'on peut toujours faire paſſer une même circonférence de cercle, par tous les angles d'un polygone régulier.

Car il eſt prouvé (55) qu'on peut faire paſſer une circonférence de cercle par les trois points *A*, *B*, *C* (*fig.* 54); or je dis qu'elle paſſe auſſi par l'extrémité du côté *CD*; en effet, il eſt facile de prouver que le point *D*, où cette circonférence doit rencontrer le côté *CD*, eſt éloigné de *C* d'une quantité égale à *BC*; car l'angle *ABC* étant égal à *BCD*, les arcs *AEC*, *BFD*, dont les moitiés ſervent de meſure à ces angles (63), doivent être égaux; retranchant de chacun l'arc commun *AFED*, les arcs reſtans *CD* & *AB*, doivent être égaux; donc auſſi 7) les cordes *CD* & *AB* ſont égales; donc le point *D*, où le côté *CD* eſt rencontré par la circonférence qui paſſe par *A*, *B*, *C*, eſt le même que le ſommet de l'angle du polygone. On démontrera la même choſe des angles *E* & *F*.

90. On voit donc que pour circonſcrire un cercle à un polygone régulier, la queſtion ſe réduit à faire paſſer un cercle par les ſommets de trois de ſes angles, ce qui ſe fait de la manière enſeignée (55).

91, *Toutes les perpendiculaires abaiſſées du centre d'un polygone régulier, ſur les côtés, ſont égales.* Car ces perpendiculaires *OH*, *OL* devant tomber ſur le milieu de chaque côté (52), les lignes *AH* & *AL* ſeront égales; or *AO* eſt commun aux deux triangles *OHA* & *OLA*; d'ailleurs, à cauſe des triangles *ABO*, *AOF* qui ont tous leurs côtés égaux chacun à chacun, les angles *OAH*, *OAL*, ſont égaux; donc les deux triangles *OAH*, *OAL*, qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, ſont égaux (80). Donc *OH* eſt égal à *OL*.

Donc, ſi d'un rayon égal à l'une de ces perpen-

diculaires, on décrit une circonférence, elle touchera tous les côtés. Cette circonférence eſt dite *inſcrite* au polygone.

Les perpendiculaires *OH*, *OL* s'appellent, chacune, l'*apothême* du polygone.

92. Il eſt clair que ſi du centre du polygone régulier on tire des lignes à tous les angles, ces lignes comprendront entr'elles des angles égaux, puiſque ces angles auront pour meſure des arcs qui ſont ſoutendus par des cordes égales; donc *pour avoir l'angle au centre d'un polygone régulier, il faut diviſer 360 degrés par le nombre des côtés.* Car ces angles égaux ont tous enſemble pour meſure la circonférence entière. Par exemple, pour l'hexagone, chaque angle au centre ſera la ſixième partie de 360 degrés; c'eſt-à-dire, ſera de 60 degrés.

93. Donc *le côté de l'hexagone eſt égal au rayon du cercle circonſcrit.* Car en tirant les rayons *AO* & *BO*, le triangle *AOB* ſera iſocèle, & par conſéquent (77) les deux angles *BAO* & *ABO* ſeront égaux; or comme l'angle *AOB* eſt de 60 degrés, les deux autres doivent valoir enſemble 120 degrés (75); donc chacun d'eux eſt de 60 degrés; les trois angles ſont donc égaux, & par conſéquent le triangle eſt équilatéral (77); donc *AB* eſt égal au rayon *AO*.

94. Cette dernière propoſition peut ſervir pour la diviſion de la circonférence, de 15 en 15 degrés.

On tirera deux diamètres *AB*, *DE* (*fig.* 55) perpendiculaires l'un à l'autre, & ayant pris une ouverture de compas égale au rayon *CE*, on la portera ſucceſſivement de *E* en *F*, & de *A* en *G*; le quart de circonférence *AE* ſera, par ce moyen, diviſé en trois parties égales *AF*, *FG*, *GE*; car puiſqu'on a pris le rayon pour l'ouverture du compas, il ſuit de ce qui vient d'être dit (93), que l'arc *EF* eſt de 60 degrés; or *EA* eſt de 90 degrés, donc *AF* eſt de 30 degrés. Par la même raiſon

AG eſt de 60 degrés ; & comme *AE* eſt de 90 degrés, *GE* eſt donc de 30 degrés ; enfin, ſi de l'arc total *AE* de 90 degrés, vous retranchez les arcs *AF* & *GE*, qui valent enſemble 60 degrés, l'arc reſtant *FG* ſera de 30 degrés. Ayant ainſi diviſé le quart de circonférence en arcs de 30 degrés, il ſera facile d'avoir l'arc de 15 degrés, en diviſant en deux parties égales, chacun des arcs *AF*, *FG*, *GE* par la méthode donnée (54). On fera les mêmes opérations ſur chacun des trois autres quarts *AD*, *DB* & *BE*.

Si l'on vouloit conduire cette diviſion juſqu'à l'arc de 1 degré, il faudroit y aller par tâtonnement ; car il n'y a pas de méthode géométrique pour cela. Il y a cependant une méthode géométrique pour venir directement juſqu'à l'arc de 3 degrés ; mais comme les propoſitions qui y conduiſent ne peuvent nous être d'aucune autre utilité, nous n'en parlerons point.

Remarquons ſeulement que ce que nous entendons ici par opérations géométriques, ce ſont celles dans leſquelles la choſe dont il s'agit, peut être exécutée par un nombre *déterminé* d'opérations faites avec la règle & le compas ſeuls.

Des Lignes proportionnelles.

95. Avant que d'entrer en matière ſur ce qui regarde les lignes proportionnelles, nous placerons ici quelques propoſitions ſur les proportions, qui ſont une ſuite immédiate de ce que nous avons enſeigné dans l'Arithmétique. Mais pour abréger le diſcours, nous conviendrons, pour l'avenir, que lorſque deux quantités devront être ajoutées l'une à l'autre, nous indiquerons cette opération par ce ſigne +, qui équivaudra au mot *plus* ; ainſi 4+3 ſignifiera 4 plus 3, ou 4 ajouté à 3, ou 3 ajouté à 4. Pareillement pour marquer la ſouſtraction, nous nous ſervirons de ce ſigne —, qui équivaudra au mot *moins* ; ainſi 5—2 ſignifiera 5 moins 2, ou qu'on doit retrancher 2 de 5. Comme il n'eſt pas toujours queſtion de faire réellement les opérations, mais de raiſonner ſur des circonſtances de ces opérations, il eſt ſouvent plus utile de les repréſenter, que d'en donner le réſultat.

Pour marquer la multiplication, nous nous ſervirons de ce ſigne ×, qui équivaudra à ces mots *multiplié par*; ainſi 5 × 4, ſignifiera 5 multiplié par 4.

Et pour marquer la diviſion, nous ferons comme en Arithmétique : nous écrirons le dividende & le diviſeur en forme de fraction dont le dividende ſera numérateur, & le diviſeur, dénominateur; ainſi $\frac{12}{7}$ marquera 12 diviſé par 7.

Cela poſé, nous avons vu (*Arith.* 175) que dans toute proportion, la ſomme des antécédens, eſt à la ſomme des conſéquens, comme un antécédent eſt à ſon conſéquent; & qu'il en eſt de même de la différence des antécédens comparée à celle des conſéquens.

96. Nous pouvons donc conclure de-là, que *dans toute proportion la ſomme des antécédens eſt à la ſomme des conſéquens, comme la différence des antécédens eſt à la différence des conſéquens*; car puiſque dans la proportion 48 : 16 : : 12 : 4, par exemple, on a (*Arith.* 175),

$$48 + 12 : 16 + 4 : : 12 : 4,$$

$$\& \quad 48 - 12 : 16 - 4 : : 12 : 4.$$

il eſt évident (à cauſe du rapport commun de 12 : 4) qu'on peut conclure 48 + 12 : 16 + 4 : : 48 — 12 : 16 — 4. Le raiſonnement eſt le même pour toute autre proportion.

97. On peut donc, en mettant, dans cette dernière proportion, le troiſième terme à la place du ſecond, & le ſecond à la place du troiſième, ce qui eſt permis (*Arith.* 171), dire auſſi, que *la ſomme des antécédens, eſt à leur différence, comme la ſomme des conſéquens, eſt à leur différence.*

98. Si dans la proportion 48 : 16 : : 12 : 4, on

échange les places des deux moyens, ce qui donnera 48 : 12 :: 16 : 4, & qu'on applique à celle-ci la propoſition qu'on vient de démontrer (96); on aura 48 + 16 : 12 + 4 :: 48 — 16 : 12 — 4, qui à l'égard de la proportion 48 : 16 :: 12 : 4, fournit cette propoſition, *La ſomme des deux premiers termes d'une proportion, eſt à la ſomme des deux derniers termes, comme la différence des deux premiers, eſt à la différence des deux derniers;* ou (en mettant le troiſieme terme à la place du ſecond, & le ſecond à la place du troiſième) *la ſomme des deux premiers termes, eſt à leur différence, comme la ſomme des deux derniers, eſt à leur différence.*

99. *Si un rapport eſt compoſé du produit de pluſieurs autres rapports, on peut, à chacun des rapports compoſans, ſubſtituer un rapport exprimé par d'autres termes, pourvu que ces deux termes aient le même rapport que ceux auxquels on les ſubſtituera.*

Par exemple, dans le rapport de $6 \times 10 : 2 \times 5$, on peut, au lieu des facteurs 6 & 2 ſubſtituer 3 & 1, ce qui donnera le rapport compoſé $3 \times 10 : 1 \times 5$ qui eſt le même que le rapport $6 \times 10 : 2 \times 5$. En effet, puiſque $6 : 2 :: 3 : 1$, on peut, ſans changer cette proportion (*Arith.* 173), multiplier les antécédens par 10 & les conſéquens par 5, & alors on aura $6 \times 10 : 2 \times 5 :: 3 \times 10 : 1 \times 5$.

Il eſt facile de voir que ce raiſonnement s'applique à tout autre rapport.

100. Si deux, ou un plus grand nombre de proportions ſont telles que dans le premier rapport de l'une, l'antécédent ſe trouve égal au conſéquent de l'autre, on pourra, lorſqu'il s'agira de multiplier ces proportions par ordre, omettre les termes qui ſe trouveront communs d'antécédent à conſé-

quent; par exemple, ſi on a les deux proportions

$$6 : 4 :: 12 : 8$$
$$4 : 3 :: 20 : 15$$

on pourra conclure $6 : 3 :: 12 \times 20 : 8 \times 15$.

Car quand on admettroit le multiplicateur commun 4, le rapport de 6×4 à 4×3 qu'on auroit alors, ne différeroit pas du rapport de 6 à 3 (*Arith.* 160) que l'on a en omettant ce facteur.

De même ſi on a
$$6 : 4 :: 12 : 8$$
$$4 : 3 :: 20 : 15$$
$$3 : 7 :: 21 : 49$$

on en conclura $6 : 7 :: 12 \times 20 \times 21 : 8 \times 15 \times 49$.

La même choſe aura lieu pour les ſeconds rapports, & par la même raiſon.

Cette obſervation eſt utile pour trouver le rapport de deux quantités, lorſque ce rapport doit être compoſé; parce qu'alors on compare chacune de ces quantités à d'autres quantités qu'on emploie comme auxiliaires, & qui ne doivent plus reſter après la démonſtration.

Nous allons, maintenant, tranſporter aux lignes les connoiſſances que nous avons tirées des nombres, ſur les proportions. Mais pour rendre nos démonſtrations plus courtes & plus générales, nous ne donnerons aucune valeur particulière à ces lignes, ſinon dans quelques applications; au reſte on peut toujours s'aider par des comparaiſons avec des nombres.

Les rapports que nous conſidérons ici, ſont les rapports géométriques. Ainſi quand nous dirons, une telle ligne eſt à une telle ligne, comme 5 eſt à 4, par exemple; on doit entendre que la première contient la ſeconde, autant que 5 contient 4.

101. *Si ſur un des côtés* AZ *d'un angle quel-*

conques ZAX (fig. 56), *on marque les parties égales* AB, BC, CD, DE, &c. *de telle grandeur & en tel nombre qu'on voudra ; & ſi après avoir tiré à volonté, par l'un* F, *des points de diviſion, la ligne* FL *qui rencontre le côté* AX *en* L, *on mène par les autres points de diviſion, les lignes* BG, CH, DI, EK, &c. *parallèles à* FL ; *je dis que les parties* AG, GH, HI &c. *du côté* AX, *ſeront auſſi égales entr'elles.*

Menons par les points *G, H, I, &c.* les lignes *GM, HN, IO, &c.* parallèles à *AZ ;* les triangles *ABG, GMH, HNI, IOK, &c.* ſeront tous égaux entr'eux; car 1°. les lignes *GM, HN, IO, &c.* ſont, chacune, égales à *AB*, puiſque (82) elles ſont égales à *BC, CD, DE, &c.* 2°. les angles *GMH, HNI, IOK, &c.* ſont tous égaux entr'eux, puiſqu'ils ſont tous égaux à l'angle *ABG* (43) : les angles *MGH, NHI, OIK, &c.* ſont tous égaux entr'eux, puiſqu'ils ſont tous égaux à l'angle *BAG* (43).

Tous les triangles *BAG, MGH, NHI, &c.* ont donc un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; ils ſont donc tous égaux; donc les côtés *AG, GH, HI, &c.* de ces triangles, ſont tous égaux entr'eux; donc la ligne *AX* eſt, en effet, diviſée en parties égales, par les parallèles.

Il eſt donc évident que ſi *AB* eſt telle partie que ce ſoit de *AG*, *BC* ſera une ſemblable partie de *GH*; *CD* ſera une ſemblable partie de *HI*; ſi, par exemple, *AB* eſt les $\frac{2}{3}$ de *AG*, *BC* ſera les $\frac{2}{3}$ de *GH*, & ainſi de ſuite.

Il en ſera de même de 2, 3, 4, &c. parties de *AF* comparées à 2, 3, 4, &c. parties de *AL;* donc une portion quelconque *AD* ou *DF* de la ligne *AF*, eſt même partie de la portion correſpondante *AI* ou *IL* de la ligne *AL*, que *AB* l'eſt de *AG ;* c'eſt-à-dire, que.....

$$AD : AI :: AB : AG,$$
$$\& DF : IL :: AB : AG.$$

On peut dire de même, que $AF : AL :: AB : AG$.

Donc (à cauſe du rapport de $AB : AG$ commun à ces trois proportions) on peut dire que

$$AD : AI :: DF : IL,$$
$$\& AD : AI :: AF : AL.$$

102. *Donc ſi par un point* D (fig. 57) *pris à volonté ſur un des côtés* AF *d'un triangle* AFL, *on mène une ligne* DI *parallèle au côté* FL, *les deux côtés* AF, AL *ſeront coupés proportionnellement*, c'eſt-à-dire, qu'on aura toujours

$$AD : AI :: DF : IL,$$
$$\& AD : AI :: AF : AL;$$

ou bien, en échangeant les places des deux moyens (*Arith.* 171),

$$AD : DF :: AI : IL,$$
$$\& AD : AF :: AI : AL,$$

quelque ſoit d'ailleurs l'angle *FAL*.

Car on peut toujours concevoir *AF* diviſée en un aſſez grand nombre de parties, pour que *D* ſoit un des points de diviſion. Si donc par tous ces points de diviſion on conçoit des parallèles à *FL*; *DI* étant l'une de ces parallèles, on démontrera préciſément, comme on vient de le faire (101), que chacune de ces proportions à lieu.

103. Donc, 1°. *Si d'un point* A *pris à volonté hors de la ligne* GL (fig. 60 & 61), *on tire à différens points de cette ligne, pluſieurs lignes* AG, AH, AI, AK, AL; *toute parallèle* BF *à la ligne* GL, *coupera toutes ces lignes, en parties proportionnelles*, c'eſt-à-dire, qu'on aura....

$AB : BG :: AC : CH :: AD : DI :: AE : EK :: AF : FL$
& $AB : AG :: AC : AH :: AD : AI :: AE : AK :: AF : AL$,

Car en considérant successivement les angles GAH, GAI, GAK, GAL, comme on a fait l'angle FAL dans la *figure* 57, on démontrera de la même manière, que tous ces rapports sont égaux.

104. 2°. *La ligne* AD (fig. 58) *qui divise en deux parties égales un angle* BAC *d'un triangle, coupe le côté opposé* BC, *en deux parties* BD, DC, *proportionnelles aux côtés correspondans* AB, AG; *c'est-à-dire, de manière qu'on a* BD : DC : : AB : AC.

Car si par le point B on mène BE parallèle à AD, & qui rencontre CA prolongé en E, les lignes CE, CB étant alors coupées proportionnellement (102), on aura $BD : CD :: AE : AC$.

Or il est facile de voir que AE est égale à AB; car à cause des parallèles AD & BE, l'angle E est égal à l'angle DAC (37), & l'angle EBA est égal à son alterne BAD (38); donc puisque DAC & BAD sont égaux comme étant les moitiés de BAC, les angles E & EBA seront égaux; donc les côtés AE & AB sont aussi égaux; donc la proportion $BD : CD :: AE : AC$, se change en celle-ci $BD : CD :: AB : AC$.

On peut faire usage de cette proposition pour déterminer les points du prolongement de la capitale d'un bastion.

On prendra sur les prolongemens BD, BE (*fig.* 59) des deux faces, deux points D & E; & ayant mesuré BD & BE, ou (lorsqu'on ne peut les mesurer) en ayant determiné les longueurs, par les moyens qui seront enseignés par la suite, on mesurera aussi DE; alors comme la capitale divise l'angle ABC & son opposé DBE en deux parties égales, on aura $DB : BE :: DF : EF$, ce qui (*Arith.* 174) donne $DB + BE : BE : DE : EF$. On aura donc EF, & par conséquent le point F.

105.

105. *Si on coupe les lignes* AF & AL (fig. 57), *proportionnellement aux points* D & I, *c'eſt à-dire, de manière que* AF : AD :: AL : AI, *la ligne* DI *ſera parallèle à* FL.

Car la partie de *AL* que couperoit la parallèle menée du point *D*, doit 102) être contenue dans *AL*, autant que *AD* l'eſt dans *AF*; or, par la ſuppoſition, *AI*, eſt contenue dans *AL* préciſément ce même nombre de fois; donc cette partie ne peut être autre que *AI*.

106. Donc *ſi on coupe proportionnellement, aux points* B, C, D, E, F (fig. 60), *les lignes* AG, AH, AI, AK, AL, *menées du point* A *à différens points de la ligne* GL, *la ligne* BCDEF *qui paſſera par tous ces points, ſera une ligne droite parallèle à* GL.

107. Les propoſitions enſeignées, (101 *& ſuiv.*) ſont également vraies, lorſque la ligne *BF*, au lieu d'être entre le point *A* & la ligne *GL*, comme dans la *figure* 60, tombe au-delà du point *A* comme dans la *figure* 61. Car tout ce qui a été dit de la *figure* 56, & qui ſert de baſe aux propoſitions établies (101 *& ſuiv.*), auroit également lieu pour les parallèles qui couperoient *ZA* & *Xa* prolongées, dans la *figure* 56.

De la ſimilitude des Triangles.

108. On appelle côtés *homologues* de deux triangles, ou en général, de deux figures ſemblables, ceux qui ont des poſitions ſemblables, chacun dans la figure à laquelle il appartient.

Lorſqu'on dit que deux triangles ou deux figures ſemblables ont les côtés proportionnels, on entend que chaque côté de la

première figure, contient le côté homologue de la ſeconde; toujours le même nombre de fois; en ſorte que dans les proportions qu'on en déduit, lorſqu'on a comparé un côté de la première au côté homologue de la ſeconde, il faut former le ſecond rapport, en comparant de même un autre côté de la première, au côté homologue de la ſeconde; ou bien ſi on a d'abord comparé l'un à l'autre, deux côtés de la première figure, les deux côtés que l'on doit comparer pour former le ſecond rapport, doivent être homologues à ceux-là, & pris dans le même ordre; c'eſt-à-dire, que l'antécédent du ſecond rapport doit être côté homologue de l'antécédent du premier.

109. *Deux triangles qui ont les angles égaux chacun à chacun, ont les côtés homologues proportionnels, & ſont, par conſéquent, ſemblables.*

Si les deux triangles *ADI*, *AFL* (*fig. 62*), ſont tels que l'angle *A* du premier ſoit égal à l'angle *A* du ſecond, l'angle *D* égal à l'angle *F*, & l'angle *I* égal à l'angle *L*, je dis qu'on aura *AD* : *AF* : : *AI* : *AL* : : *DI* : *FL*.

Car puiſque l'angle *A* du premier eſt égal à l'angle *A* du ſecond, on peut appliquer ces deux triangles l'un ſur l'autre de la manière repréſentée dans la *figure 57*; alors puiſque l'angle *D* eſt égal à l'angle *F*, les lignes *DI* & *FL* ſeront parallèles (37); donc, ſelon ce qui a été dit (102), on aura *AD* : *AF* : : *AI* : *AL*.

Tirons maintenant par le point *I*, la droite *IH* parallèle à *AF*; ſelon ce qui a été dit (102), on voit que *AI* : *AL* : : *FH* : *FL*, ou, à cauſe que *FH* eſt égal à *DI* (82) : : *DI* : *FL*; donc *AD* : *AF* : : *AI* : *AL* : : *DI* : *FL*.

Comme on peut échanger les places des moyens, on peut dire auſſi *AD* : *AI* : : *AF* : *AL*, & *AI* : *DI* : : *AL* : *FL*.

110. Puiſque (75) lorſque deux angles d'un triangle ſont égaux à deux angles d'un autre triangle,

le troiſième angle eſt néceſſairement égal au troiſième angle ; concluons-en que *deux triangles ſont ſemblables lorſqu'ils ont deux angles egaux chacun à chacun.*

111. On a vu (43) que deux angles qui ont les côtés parallèles, & qui ſont tournés d'un même côté, ſont égaux ; donc *deux triangles qui ont les côtés parallèles, ont les angles égaux chacun à chacun, & ont, par conſéquent* (109) *les côtés proportionnels.*

Donc auſſi *deux triangles qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, ont auſſi ces mêmes côtés proportionnels ;* car ſi on fait faire un quart de ré olution, à l'un de ces triangles, ſes côtés deviendront parallèles à ceux du ſecond.

112. *Si de l'angle droit* A *d'un triangle rectangle* BAC (fig. 46), *on abaiſſe une perpendiculaire* AD *ſur le côté oppoſé* BC (*qu'on appelle* hypothénuſe) ; 1°. *les deux triangles* ADB, ADC *ſeront ſemblables entr'eux & au triangle* BAC. 2°. *La perpendiculaire* AD *ſera moyenne proportionnelle entre les deux parties* BD & DC *de l'hypothénuſe.* 3°. *Chaque côté* AB *ou* AC *de l'angle droit, ſera moyen proportionnel entre l'hypothénuſe & le ſegment correſpondant* BD *ou* DC.

Car les deux triangles *ADB*, *ADC*, ont chacun un angle droit en *D*, comme le triangle *BAC* en a un en *A ;* d'ailleurs ils ont de plus chacun un angle commun avec ce même triangle *BAC*, puiſque l'angle *B* appartient tout à-la-fois au triangle *ADB* & au triangle *BAC* ; pareillement l'angle *C* appartient tout a-la fois au triangle *ADC* & au triangle *BAC ;* donc (109) ces trois triangles ſont ſemblables. Donc, comparant les côtés

homologues des deux triangles ADB & ADC, on aura

$$BD : AD :: AD : DC;$$

comparant les côtés homologues des deux triangles ADB, BAC, on aura

$$BD : AB :: AB : BC;$$

enfin comparant les côtés homologues des triangles ADC & BAC, on aura

$$CD : AC :: AC : BC,$$

où l'on voit que AD eſt (*Arith.* 164) moyenne proportionnelle entre BD & DC; AB moyenne proportionnelle entre BD & BC; & enfin AC moyenne proportionnelle entre CD & BC.

113. *Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, ont auſſi les deux autres angles égaux, & ſont, par conſéquent, ſemblables.*

Si les deux triangles ADI, AFL (*fig.* 62) ſont tels que l'angle A du premier ſoit égal à l'angle A du ſecond, & qu'en même temps les côtés qui comprennent ces angles, ſoient tels qu'on ait $AD : AF :: AI : AL$; je dis qu'ils ſeront ſemblables; c'eſt-à-dire, qu'ils auront les autres angles égaux chacun à chacun, & leurs troiſièmes côtés DI & FL en même rapport que AD & AF, ou que AI & AL.

Car on peut appliquer l'angle A du triangle ADI ſur l'angle A du triangle AFL, de la manière repréſentée par la *figure* 57. Or puiſqu'on ſuppoſe que $AD : AF :: AI : AL$, les deux droites AF & AL ſont donc coupées proportionnellement aux points D & I; donc DI eſt parallèle à FL (105); donc (37) l'angle AFL

eſt égal à l'angle ADI, & l'angle ALF égal à l'angle AID.

De-là & de ce qui a été dit (109), il ſuit que $DI:FL::AD:AF::AI::AL$.

114. *Deux triangles qui ont leurs trois côtés homologues proportionnels, ont les angles égaux chacun à chacun, & ſont, par conſéquent, ſemblables.*

Si on ſuppoſe (*fig.* 63) que $DE:AB::EF:BC::DF:AC$; je dis que l'angle D eſt égal à l'angle A, l'angle E égal à l'angle B, & l'angle F égal à l'angle C.

Imaginons qu'on ait conſtruit ſur DE, un triangle DGE, dont l'angle DEG ſoit égal à l'angle B, & l'angle GDE à l'angle A; le triangle DEG ſera ſemblable au triangle ABC (109); donc (109) $DE:AB::GE:BC::DG:AC$; mais par la ſuppoſition, on a $DE:AB::EF:BC::DF:AC$; donc à cauſe du rapport commun de $DE:AB$, on aura $GE:BC::EF:BC::DG:AC::DF:AC$, d'où l'on peut tirer ces deux proportions:

$$GE:BC::EF:BC$$
$$\&\ DG:AC::DF:AC.$$

Donc puiſque les deux conſéquens ſont égaux entr'eux dans chacune de ces deux proportions, les antécédens ſeront auſſi égaux entr'eux; donc GE eſt égal à EF, & DG égal à DF. Le triangle DEG a donc ſes trois côtés égaux à ceux du triangle DEF; il eſt donc (83) égal à ce triangle DEF; or on vient de voir que le triangle DEG eſt ſemblable à ABC, donc DEF eſt auſſi ſemblable à ABC.

115. Nous avons prouvé ci-deſſus (109) que

quand la ligne *DI* (*fig.* 57), eſt parallèle au côté *FL*, les deux triangles *ADI* & *AFL*, ſont ſemblables; comme cette vérité a lieu, de quelque grandeur que puiſſe être l'angle *A*, on doit donc conclure (*fig.* 60) que les triangles *AGH*, *AHI*, *AIK*, *AKL*, ſont ſemblables aux triangles *ABC*, *ACD*, *ADE*, *AEF*, chacun à chacun, & que par conſéquent (109) *KL* : *EF* :: *AK* : *AE* :: *KI* : *DE* :: *AI* : *AD* :: *IH* : *CD* :: *AH* : *AC* :: *GH* : *BC*; donc, en ne tirant de cette ſuite de rapports, que ceux qui renferment des parties des lignes *GL* & *BF* on aura *KL* : *EF* :: *KI* : *DE* :: *IH* : *CD* :: *GH* : *BC*; c'eſt à-dire, que *ſi d'un point* A, *on tire à différens points d'une ligne droite* GL, *pluſieurs autres lignes droites; ces lignes couperont toute parallèle à* GL, *de la même manière qu'elles couperont* GL, *c'eſt à dire, en parties qui auront entr'elles les mêmes rapports que les parties correſpondantes de* GL.

116. La propoſition enſeignée (101) fournit le moyen de diviſer une ligne donnée en parties égales, ou en parties qui aient entr'elles des rapports donnés. Suppoſons que *AR* (*fig.* 56) ſoit une ligne qu'on veut diviſer en deux parties qui aient entr'elles un rapport donné, par exemple, celui de 7 à 3; on tirera par le point *A*, & ſous tel angle qu'on voudra, une ligne indéfinie *AZ*, & ayant pris arbitrairement une ouverture de compas *AB*, on la portera dix fois le long de *AZ*; je ſuppoſe que Q ſoit l'extrémité de la dernière partie; on joindra les extrémités *Q* & *R* de la ligne *AQ*, & de la ligne donnée *AR*; alors ſi par le point *D*, extrémité de la troiſième diviſion, on tire *DI* parallèle à *QR*, la ligne *AR* ſera diviſée en deux parties *RI* & *AI*, qui ſeront entr'elles :: 7 : 3; car (101 & 102 elles ſont entr'elles :: *DQ* : *AD*, que l'on a faites de 7 & de 3 parties.

On voit par là que ſi l'on vouloit diviſer la ligne *AR* en un plus grand nombre de parties, par exemple, en 5 parties, qui fuſſent entr'elles comme les nombres 7, 5, 4, 3, 2; on ajouteroit tous ces nombres entr'eux, ce qui donneroit 21; on porteroit vingt une ouvertures de compas ſur la ligne *AZ*, & on tireroit des parallèles à la ligne *QR*, par les extrémités de la 7e, 5e, 4e, 3e, 2e diviſion.

Si les rapports étoient donnés en lignes, on mettroit toutes ces lignes bout-à-bout ſur la ligne AZ.

On voit donc ce qu'il y auroit à faire, ſi l'on vouloit diviſer la ligne AR en parties égales.

Mais quand les parties de la ligne qu'on doit diviſer, doivent être petites, ou quand cette ligne elle-même eſt petite, le plus léger défaut dans les parallèles influe beaucoup ſur l'égalité ou l'inégalité des parties ; c'eſt pourquoi il ne ſera pas inutile d'expoſer la méthode ſuivante.

117. fg (*fig.* 64) eſt la ligne qu'il s'agit de diviſer en parties égales, en 6, par exemple : on tirera une ligne indéfinie BC, ſur laquelle on portera 6 fois de ſuite une même ouverture de compas, arbitraire : ſoit BC la ligne qui comprend ces ſix parties, on décrira ſur BC un triangle équilatéral BAC, en décrivant des deux points B & C comme centres, & de l'intervalle BC comme rayon, deux arcs qui ſe coupent en A. Sur les côtés AB, AC, on prendra les parties AF, AG égales chacune à fg ; & ayant tiré FG, cette ligne ſera égale à fg ; on mènera du point A à tous les points de diviſion de BC, des lignes droites, qui coupent FG de la même manière que BC eſt coupée.

Car les lignes AF, AG, étant égales entr'elles, & les lignes AB, AC, auſſi égales entr'elles, on a $AB : AF :: AC : AG$; donc AB, AC ſont coupées proportionnellement en F & G ; donc FG eſt parallèle à BC, & par conſéquent (113) le triangle FAG eſt ſemblable à ABC ; donc FAG eſt équilatéral ; donc FG eſt égal à AF, & par conſéquent à fg ; de plus FG étant parallèle à BC, ces deux lignes (115) doivent être coupées proportionnellement par les lignes menées du point A à la droite BC.

Ce que nous venons d'expoſer peut ſervir à former & à diviſer l'échelle qui doit ſervir lorſqu'on veut réduire une figure, du grand au petit ; mais l'échelle la plus commode dans un grand nombre d'opérations, eſt celle qu'on appelle échelle de *dixme* : voici comment elle ſe conſtruit. Aux extrémités A & B de la ligne AB (*fig.* 65) qu'on veut diviſer en 100 parties, on élève les perpendiculaires AC, BD ſur chacune deſquelles on porte dix ouvertures de compas égales entr'elles, mais de grandeur arbitraire ; ayant tiré CD, on diviſe AB en 10 parties, & on porte ces parties ſur CD, après quoi on tire des tranſverſales, comme on le voit dans la figure ; & par les points de diviſion correſpondans de CA & de BD, on tire des lignes droites qui ſont autant de parallèles à AB ; alors on eſt dans le même cas que ſi l'on avoit diviſé AB en 100 parties ; ſi l'on

veut, par exemple, avoit 47 parties dont AB en contient 100; je prends ſur la ligne qui paſſe au n° 7, la partie $7H$ depuis CA juſqu'à la tranſverſale qui paſſe par le n° 40, & ainſi pour tout autre nombre.

En effet, à cauſe des triangles ſemblables $C7v$, CAx, il eſt évident que $7v$ contient 7 parties dont Ax en contiendroit 10; donc puiſque vH contient 4 intervalles égaux à Ax, la ligne entière $7H$ vaut 47 parties dont Ax en contiendroit 10; c'eſt-à-dire, 47 parties dont AB en contiendroit 100.

118. La propoſition démontrée (102) peut ſervir à *trouver une quatrième, proportionnelle à trois lignes données* ab, cd, ef (*fig.* 57), c'eſt-à-dire, une ligne qui ſoit le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers ſeroient *ab*, *cd*, *ef*. Pour cet effet, après avoir tiré deux droites indéfinies AF, AL qui faſſent entr'elles tel angle qu'on voudra, on portera *ab* de A en D, & *cd* de A en F; on portera pareillement *ef* de A en I; & ayant joint les deux points D & I par la droite DI, on mènera par le point F la ligne FL parallèle à DI qui déterminera AL pour la quatrième proportionnelle cherchée.

On peut auſſi, en vertu de la propoſition enſeignée (109), s'y prendre de cette autre manière. Prendre ſur une ligne indéfinie AF (*fig.* 57), les deux parties AD, AF égales à *ab*, *cd* reſpectivement; & ayant tiré DI égale à *ef*, & ſous tel angle qu'on voudra, on tirera par le point A & le point I, la droite AIL que l'on coupera par une ligne FL parallèle à DI; cette parallèle ſera le quatrième terme cherché.

Quand les deux termes moyens d'une proportion ſont égaux, le quatrième terme s'appelle alors *troiſième proportionnel*, parce qu'il n'y a que trois quantités différentes dans la proportion. Ainſi quand on demande une troiſième proportionnelle à deux lignes données, il faut entendre qu'on demande le quatrième terme d'une proportion, dans laquelle la ſeconde des deux lignes données fait l'office des deux moyens, & l'opération eſt la même que celle qu'on vient d'enſeigner.

La théorie des lignes proportionnelles, & des triangles ſemblables, eſt la baſe d'un grand nombre d'opérations de la Géométrie-pratique. Nous ferons connoître les principales; mais nous ne parlerons, pour le préſent, que de celles qui peuvent être exécutées ſans la meſure des angles; c'eſt-à-dire, uniquement avec le ſecours de piquets & de cordeaux. Nous parlerons des autres, lorſqu'à l'occaſion de la Trigonométrie, nous aurons fait connoître les inſtrumens qui ſervent à meſurer les angles.

4°. Suppoſons qu'on ait deſſein de jeter un pont ſur une

rivière, & que dans cette vue on veuille connoître la largeur AB de cette rivière (*fig. 66*).

Dans l'alignement de AB, & à une distance BC qui soit au moins le tiers de la largeur AB estimée grossièrement, on plantera un piquet C, & l'on mesurera BC. A droite ou à gauche de BC & suivant telle direction qu'on le voudra d'ailleurs, on mesurera une distance quelconque CE (la plus longue sera la meilleure). On fixera le milieu D de CE, & ayant déterminé le point F qui est en même-temps dans l'alignement BE & dans l'alignement AD, on mesurera BF & FE. Alors on déterminera AB par cette proportion $FE - BF : \frac{1}{2} BC :: BF : AB$.

En effet, si par le milieu D on conçoit DG parallèle à AB, le point G où elle rencontrera BE sera (102) le milieu de BE, & FG sera par conséquent égale à $FE - BF$. Mais les triangles FGD & ABF semblables, à cause des parallèles, donnent $FG : GD :: BF : AB$. D'ailleurs à cause des triangles semblables EDG, ECB, on a DG moitié de CB, puisque ED est moitié de EC; donc FG ou $FE - BF : \frac{1}{2} BC :: BF : AB$.

2°. On peut s'y prendre de cette autre manière, pour mesurer les distances.

Supposons qu'il soit question de mesurer la distance d'un point B de la tranchée (*fig. 67*) pris sur la capitale de la demi-lune, au sommet A de l'angle saillant du chemin couvert.

On fera BC perpendiculaire à AB, & d'une longueur arbitraire. On plantera un piquet en un point E de BC, tel que CE soit égal à BE, ou en soit partie aliquote, comme la moitié, le tiers, &c. alors on s'éloignera sur la ligne CD perpendiculaire à BC, jusqu'à ce que de son extrémité D on voie le piquet E se confondre avec le point A. Alors AB sera égal à CD, si on a fait BE égal à CE; & AB sera le double ou le triple de CD si on a fait CE, la moitié ou le tiers de BE. Cela est évident, si on fait attention que les lignes CD & AB étant parallèles, les triangles ABE, ECD sont semblables.

3°. S'agit-il de mesurer une distance inaccessible AE (*fig. 68*)?

On prendra un point C tellement situé qu'on puisse de ce point voir les deux points A & B, & mesurer sur les alignemens des parties CD, CE, qui soient le plus approchantes qu'il sera possible de CA & CB; quoiqu'à la rigueur, on puisse les prendre petites à l'égard de CA & CB.

Par les moyens qu'on vient d'enseigner, ou par d'autres semblables qu'on peut imaginer d'après ceux-là, on déterminera la longueur de CA, & celle de CB; puis ayant placé sur les alignemens CA & CB, les piquets D & E, de manière que CD soit à $CE :: CA : CB$, (ce qui est facile, puisque l'on connoît

CA & *CB*, & que l'on peut prendre arbitrairement *CD*) on mesurera *DE*; alors on aura *AB*, par cette proportion *CD*: *DE*::*CA*:*AB*, fondée sur ce que les deux triangles *CAB*, *CDE*, ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont semblables (113).

4°. S'il est question de mener par un point connu *C* (*fig.* 70) sur le terrein, (n'ayant autre chose que des piquets) une parallèle à une ligne inaccessible *AB*.

Ayant pris arbitrairement le point *D*, on prendra sur l'alignement *AD*, un point *E* qui soit en même-temps dans l'alignement de *B* & *C*. De ce point *E*, on mènera une parallèle *EG* à la ligne supposée accessible *DB*: puis du point *C* on mènera *GCF* parallèle à *AD*, & qui rencontrera *BD* en un point *E*. Sur *EG*, on marquera un point *H* qui soit dans l'alignement *FA*; & la ligne *KCHI* que l'on fera passer par ces points, sera la parallèle demandée.

Car, à cause des parallèles *FG* & *AD*, les triangles *FHG* & *FAD* sont semblables & donnent *FG* ou *ED*: *GH*::*AD*: *FD*. Par la même raison, les triangles *ECG*, *BED*, donnent *EG* ou *FD*: *GC*.:*BD*:*DE*. Ces deux proportions ayant les mêmes extrêmes, le produit des moyens sera égal dans l'une & dans l'autre, & l'on pourra par conséquent (*Arith.* 170) former de ces quatre quantités la proportion suivante, *GC*: *GH*::*AD*: *BD*; les deux triangles *GCH* & *ABD* ont donc un angle égal compris entre côtés proportionnels; car il est évident, à cause du parallélogramme *GEDF*, que l'angle *G* est égal à l'angle *D*. Donc l'angle *GCH* ou son opposé *KCF* est égal à l'angle *BAD*; donc *CF* ayant été faite parallèle à *AD*, *CK* l'est nécessairement à *AB*.

5°. Connoissant l'épaisseur de l'épaulement d'une batterie (*fig.* 69), & l'ouverture extérieure *HK*, & intérieure *AB*, d'une embrasure que l'on veut dégorger, il s'agit de déterminer la direction des joues *HA* & *KB*.

Si on imagine que P soit le point où prolongées elles doivent se rencontrer, les triangles semblables *HKP*, *ABP* donneront *HK*:*AB*::*HP*:*AP*. Et si par les milieux *G* & *C* on conçoit la ligne du tir *GCP*, les triangles semblables *HGP*, *ACP*, donnent *HP*:*AP*::*GP*:*CP*, & par conséquent (*Arith.* 174) *HK*—*AB*:*AB*::*GC*:*CP*; on connoîtra donc CP; c'est à-dire la quantité dont il faut s'éloigner du milieu de l'ouverture *C* perpendiculairement à *AB*; pour avoir le point *P* qui avec *A* & *B* est dans les alignemens que doivent avoir les joues *AH*, *BK*.

6°. C'est par une application à peu près pareille des triangles semblables que l'on peut déterminer le point de rencontre *C*

(*fig. 71*) de la ligne de mire avec le prolongement de l'axe d'une pièce de canon.

Le boulet, par ſa peſanteur, s'écarte au ſortir de la pièce, de la direction ſuivant laquelle il eſt chaſſé; en ſorte que ſi la ligne de mire *GH* étoit parallèle à l'axe de la pièce, le boulet frapperoit toujours au-deſſous du point de mire. Pour prévenir cette erreur, on donne à la ligne de mire *GH* une inclinaiſon telle que cette ligne rencontre l'axe à une diſtance *AC* moindre que celle à laquelle le boulet pourra rencontrer cette ligne de mire prolongée. Pour déterminer ce point *C*, il ne s'agit que de connoître la longueur *AB* de l'axe de la pièce, compriſe entre les deux points de mire *G* & *H*, & les hauteurs *GA* & *HB* de ces deux points, au-deſſus de l'axe. Alors les triangles ſemblables *GAC* & *HBC* donnent *GA* : *HB* :: *AC* : *BC*, d'où (*Arith.* 174) on conclud *GA*—*HB* : *HB* :: *AB* : *BC*, où tout eſt connu excepté *BC*.

Des lignes proportionnelles conſidérées dans le Cercle.

119. Deux lignes ſont dites coupées en raiſon *inverſe* ou *réciproque*, lorſque pour former une proportion avec les parties de ces lignes, les deux parties de l'une ſe trouvent être les extrêmes, & les deux parties de l'autre, les moyens de la proportion.

Et deux lignes ſont dites *réciproquement proportionnelles* à leurs parties, lorſqu'une de ces lignes & ſa partie forment les extrêmes, tandis que l'autre ligne & ſa partie forment les moyens.

120. *Deux cordes* AC & BD (fig. 72) *qui ſe coupent dans le cercle, en quelque point* E *que ce ſoit, & ſous quelque angle que ce ſoit, ſe coupent toujours en raiſon réciproque.* C'eſt-à-dire, que *AE* : *BE* :: *DE* : *CE*.

Car ſi l'on tire les cordes *AB*, *CD*, on forme deux triangles *BEA*, *CED* qu'il eſt aiſé de démontrer être ſemblables; puiſqu'outre l'angle

BEA égal à *CED* (20), l'angle *ABE* ou *ABD* eſt égal à l'angle *DCE* ou *DCA*; car ces deux angles ont leur ſommet à la circonférence, & s'appuient ſur le même arc *AD* (64). Donc les triangles *BEA* & *CED* ſont ſemblables (109); donc ils ont leurs côtés homologues proportionnels, c'eſt-à-dire que *AE*:*BE*::*DE*:*CE*, où l'on voit que les parties de la corde *AC* ſont les extrêmes, & les parties de la corde *BD* ſont les moyens.

121. Puiſque la propoſition qu'on vient de démontrer, a lieu quelque part que ſoit le point *E*, & ſous quelque angle que ſe coupent les deux cordes *AC* & *BD*, elle a donc lieu auſſi lorſque les deux cordes (*fig.* 73), ſont perpendiculaires l'une à l'autre, & que l'une des deux, *AC* par exemple, paſſe par le centre; or dans ce cas, la corde *BD* étant coupée en deux parties égales (52), les deux termes moyens de la proportion *AE*:*BE*::*DE*:*CE*, deviennent égaux, & la proportion ſe change en cette autre, *AE*:*BE*::*BE*:*CE*; donc *toute perpendiculaire* BE *abaiſſée d'un point* B *de la circonférence, ſur le diamètre, eſt moyenne proportionnelle entre les deux parties* AE, CE *de ce diamètre.*

122. Cette propoſition a pluſieurs applications utiles. Nous n'en expoſerons qu'une pour le préſent. C'eſt pour *trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données* ae, ec, (fig. 74).

On tirera une droite indéfinie *AC*, ſur laquelle on placera, bout-à-bout, deux lignes *AE*, *EC*, égales aux lignes *ae*, *ec*; & ayant décrit ſur la totalité *AC* comme diamètre, le demi-cercle *ABC*, on élèvera au point de jonction *E* la perpendiculaire *EB* ſur *AC*; cette perpendiculaire ſera la moyenne proportionnelle demandée.

123. *Deux ſécantes* AB, AC (fig. 75), *qui*

partant d'un même point A *hors du cercle, vont ſe terminer à la partie concave de la circonférence, ſont toujours réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures* AD, AE, *à quelqu'endroit que ſoit le point* A *hors du cercle, & quelqu'angle que faſſent entr'elles ces deux ſécantes.*

Concevez les cordes *CD* & *BE*, vous aurez deux triangles *ADC*, *AEB*, dans leſquels 1°. l'angle *A* eſt commun : 2°. l'angle *B* eſt égal à l'angle *C*, parce que l'un & l'autre ont leur ſommet à la circonférence, & embraſſent le même arc *DE* (64) ; donc (109) ces deux triangles ſont ſemblables, & ont par conſéquent les côtés proportionnels ; donc *AB* : *AC* :: *AE* : *AD*, où l'on voit que la ſécante *AB* & ſa partie extérieure *AD* forment les extrêmes, tandis que la ſécante *AC* & ſa partie extérieure *AE* forment les moyens.

124. Puiſque cette propoſition eſt vraie, quel que ſoit l'angle *BAC* ; ſi l'on conçoit que le côté *AB* demeurant fixe, le côté *AC* tourne autour du point *A* pour s'écarter de *AB*, les deux points de ſection *E* & *C* s'approcheront continuellement l'un de l'autre, juſqu'à ce qu'enfin la droite *AC* tombant ſur la tangente *AF*, ces deux points ſe confondront, & *AC*, *AE* deviendront chacune égale à *AF* ; en ſorte que la proportion *AB* : *AC* :: *AE* : *AD*, deviendra *AB* : *AF* :: *AF* : *AD* ; donc

Si d'un point A, *pris hors du cercle, on mène une ſécante quelconque* AB *& une tangente* AF, *cette tangente ſera moyenne proportionnelle entre la ſécante* AB *& la partie extérieure* AD *de cette même ſécante.*

125. Cette propoſition peut, entr'autres uſages, ſervir à *couper une ligne en moyenne & extrême raiſon.* On dit qu'une ligne *AB* (*fig. 76*) eſt coupée en moyenne & extrême raiſon,

lorſqu'elle eſt coupée en deux parties AC, BC, telles que l'une BC de ces parties eſt moyenne proportionnelle entre la ligne entière AB & l'autre partie AC, c'eſt-à dire, telles que l'on ait

$$AC : BC :: BC : AB.$$

Voici comment on y parvient. On élève à l'une A des extrémités, une perpendiculaire AD égale à la moitié de AB; du point D comme centre, & d'un rayon égal à AD, on décrit une circonférence qui coupe en E la ligne BD qui joint les deux points B & D. Enfin on porte BE de B en C, & la ligne AB eſt coupée en moyenne & extrême raiſon, au point C.

En effet, la ligne AB étant perpendiculaire ſur AD, eſt tangente (49); & puiſque BF eſt ſécante, on a (124) $BF : AB :: AB : BE$ ou BC. Donc (*Arith.* 175) $BF—AB : AB—BC :: AB : BC$; or AB eſt égal à FE, puiſque AB eſt double de AD; donc $BF—AB$ eſt égal à BE ou BC; & comme $AB—BC$ eſt AC, on a donc $BC : AC :: AB : BC$, ou (*Arith.* 171) $AC : BC :: BC : AB$.

Des Figures ſemblables.

126. Deux figures d'un même nombre de côtés, ſont dites *ſemblables*, lorſqu'elles ont les angles homologues égaux, & les côtés homologues proportionnels.

Les deux figures $ABDCE$, $abcde$ (*fig.* 77) ſont ſemblables, ſi l'angle A eſt égal à l'angle a; l'angle B, égal à l'angle b; l'angle C, égal à l'angle c, & ainſi de ſuite; & ſi en même temps, le côté AB contient le côté ab, autant que BC contient bc, autant que CD contient cd, & ainſi de ſuite.

Ces deux conditions ſont néceſſaires à la fois, dans les figures de plus de trois côtés. Il n'y a que dans les triangles où l'une de ces conditions ſuffiſe, parce qu'elle entraîne néceſſairement l'autre (109 & 114).

127. *Si de deux angles homologues* A & a, *de deux polygones ſemblables, on mène des diagonales* AC, AD, ac, ad, *aux autres angles; les deux polygones ſeront*

partagés en un même nombre de triangles ſemblables chacun à chacun.

Car l'angle *B* eſt (par la ſuppoſition) égal à l'angle *b* & le côté *AB* : *ab* :: *BC* : *bc*; donc les deux triangles *ABC*, *abc* qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, ſont ſemblables (113); donc l'angle *BCA* eſt égal à l'angle *bca*, & *AC* : *ac* :: *BC* : *bc*.

Si des angles égaux *BCD*, *bcd*, on ôte les angles égaux *BCA*, *bca*, les angles reſtans *ACD*, *acd* ſeront égaux, Or *BC* : *bc* :: *CD* : *cd*; donc, puiſqu'on vient de prouver que *BC* : *bc* :: *AC* : *ac*, on aura *CD* : *cd* : *AC* :: *ac*; donc les deux triangles *ACD*, *acd*, ſont auſſi ſemblables, puiſqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels. On prouvera la même choſe, & de la même manière, pour les triangles *ADE* & *ade*, & pour tous les autres triangles qui ſuivroient, ſi ces polygones avoient un plus grand nombre de côtés.

128. *Si deux polygones* ABCDE, abcde, *ſont compoſés d'un même nombre de triangles ſemblables chacun à chacun, & ſemblablement diſpoſés, ils ſeront ſemblables.*

Car les angles *B* & *E* ſont égaux aux angles *b* & *e*, dès que les triangles ſont ſemblables; & par cette même raiſon, les angles partiels *BCA*, *ACD*, *CDA*, *ADE*, ſont égaux aux angles partiels *bca*, *acd*, *cda*, *ade*; donc les angles totaux *BCD*, *CDE*, ſont égaux aux angles totaux *bcd*, *cde*, chacun à chacun. D'ailleurs la ſimilitude des triangles fournit cette ſuite de rapports égaux *AB* : *ab* :: *BC* : *bc* :: *AC* : *ac* :: *CD* : *cd* :: *AD* : *ad* :: *DE* : *de* :: *AE* : *ae*; ne tirant de cette ſuite, que les rapports qui renferment les côtés des deux polygones, on a *AB* : *ab* :: *BC* : *bc* :: *CD* : *cd* :: *DE* : *de* :: *AE* : *ae*,

Donc ces polygones ont auſſi les côtés homologues proportionnels; donc ils ſont ſemblables.

Donc pour conſtruire une figure ſemblable à une figure propoſée *ABCD* (*fig. 77*), & qui ait pour côté homologue à *AB*, une ligne donnée; on portera cette ligne donnée ſur *AB*, de *A* en *f*; par le point *f*, on tirera *fg* parallèle à *BC*, & qui rencontre *AC* en *g*; par le point *g*, on mènera *gh* parallèle à *CD*, & qui rencontre *AD* en *h*; enfin par le point *h*, on tirera *hi* parallèle à *ED*, & l'on aura le polygone *Afghi* ſemblable à *ABCDE*.

129. *Les contours de deux figures ſemblables ſont entr'eux comme les côtés homologues de ces figures*; c'eſt-à-dire, que la ſomme des côtés de la figure *ABCDE* contient la ſomme des côtés de la figure *abcde*, autant que le côté *AB* contient le côté *ab*.

Car dans la ſuite de rapports égaux $AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: AE : ae$, la ſomme des antécédens, eſt (*Arith.* 175) à la ſomme des conſéquens, comme un antécédent eſt à ſon conſéquent, $:: AB : ab$; or il eſt évident que ces ſommes ſont les contours des deux figures.

130. Si l'on conçoit la circonférence..... *ABCDEFGH* (*fig.* 78) diviſée en tel nombre de parties égales qu'on voudra; & ſi ayant tiré du centre *I*, aux points de diviſion, des rayons *IA*, *IB*, &c. on décrit d'un autre rayon *Ia*, la circonférence *abcdefgh*, rencontrée par ces rayons aux points *a*, *b*, *c*, *d*, &c. il eſt évident que ſi, dans chaque circonférence, on joint les points de diviſion par des cordes, on formera deux polygones ſemblables; car les triangles *ABI*, *abI*, &c. ſont ſemblables, puiſqu'ils ont un angle commun en *I* compris entre deux côtés proportionnels; car *IA* étant égal à *IB*, & *Ia* égal à *Ib*, on a évidemment $AI : BI :: aI : bI$, & la même choſe ſe

démontre

démontre de même pour les autres triangles. De-là & de ce qui vient d'être dit (129), on conclura donc que le contour *A B C D E F G H* eſt au contour *a b c d e f g h* :: *A B* : *a b*, ou (à cauſe des triangles ſemblables *A B I*, *a b I*) :: *A I* : *a I*. Comme cette ſimilitude ne dépend point du nombre des côtés de ces deux polygones, elle aura donc encore lieu lorſque le nombre des côtés de chacun ſera multiplié à l'infini; or dans ce cas on conçoit qu'il n'y a plus aucune différence entre la circonférence & le polygone inſcrit; donc les circonférences mêmes *A B C D E F G H*, *a b c d e f g h* ſeront entr'elles :: *A I* : *a I*, c'eſt-à-dire, comme leurs rayons, & par conſéquent auſſi comme leurs diamètres.

131. Concluons donc, 1°. qu'on *peut regarder la circonférence du cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés.*

2°. *Les cercles ſont des figures ſemblables.*

3°. *Les circonférences des cercles ſont entr'elles comme leurs rayons, ou comme leurs diamètres.*

132. En général, ſi dans deux polygones ſemblables, on tire deux lignes également inclinées à l'égard de deux côtés homologues, & terminées à des points ſemblablement placés à l'égard de ces côtés, ces lignes qu'on appelle *lignes homologues*, ſeront entr'elles dans le rapport de deux côtés homologues quelconques. Car dès qu'elles ſont des angles égaux avec deux côtés homologues, elles feront auſſi des angles égaux avec deux autres côtés homologues quelconques, puiſque les angles de deux polygones ſemblables, ſont égaux chacun à chacun; or ſi dans ce cas elles n'étoient pas dans le même rapport que deux côtés homologues, il eſt facile de ſentir que les points où elles ſe

terminent, ne pourroient pas être ſemblablement placés comme on le ſuppoſe.

DEUXIÈME SECTION.

Des Surfaces.

133. NOUS allons examiner les propriétés de la ſeconde des trois ſortes d'étendue que nous avons diſtinguées; c'eſt-à-dire, de l'étendue en longueur & largeur.

Nous ne conſidérerons, dans cette ſection, que les *ſurfaces* ou *ſuperficies planes*; nous nous bornerons même à celles des figures rectilignes, & du cercle.

La meſure des ſurfaces ſe réduit à celle des triangles, ou à celle des quadrilatères.

On diſtingue les quadrilatères en *Quadrilatère* ſimplement dit, *Trapeze*, & *Parallélogramme*.

La figure de quatre côtés, qu'on appelle ſimplement *Quadrilatère*, eſt celle parmi les côtés de laquelle il ne s'en trouve aucun qui ſoit parallèle à un autre. (*Voyez fig.* 83).

Le *Trapeze* eſt un quadrilatère dont deux côtés ſeulement ſont parallèles (*fig.* 84).

Le *Parallélogramme* eſt un quadrilatère dont les côtés oppoſés ſont parallèles (*fig.* 79, 80, 81, 82, 88, 89); on diſtingue quatre ſortes de parallélogrammes; le *rhomboïde*, le *rhombe*, le *rectangle* & le *quarré*.

Le *rhomboïde* eſt le parallélogramme dont les côtés contigus, & les angles, ſont inégaux, (*fig.* 79).

Le *rhombe*, autrement dit *lozange*, eſt celui dont les côtés ſont égaux, & les angles inégaux, (*fig.* 80).

Le *rectangle*, eſt celui dont les angles ſont égaux, & les côtés contigus inégaux, (*fig.* 81).

Le *quarré* eſt celui dont les côtés & les angles ſont égaux, (*fig.* 82).

Quand les angles d'un quadrilatère ſont égaux, ils ſont néceſſairement droits, parce que les quatre angles de tout quadrilatère, valent enſemble quatre angles droits (86).

La perpendiculaire *E F* (*fig.* 79), menée entre les deux côtés oppoſés d'un parallélogramme, s'appelle la *hauteur* de ce parallélogramme; & le côté *B C* ſur lequel tombe cette perpendiculaire, s'appelle la *baſe*.

La hauteur d'un triangle *A B C* (*fig.* 85, 86 & 87), eſt la perpendiculaire *AD* abaiſſé d'un angle *A* de ce triangle, ſur le côté oppoſé *B C*, prolongé, s'il eſt néceſſaire; & ce côté *B C* ſe nomme alors la *baſe*.

134. *Un triangle rectiligne quelconque* A B C (fig. 87) *eſt toujours la moitié d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur que lui.*

Car on peut toujours concevoir tirée, par le ſommet de l'angle *C*, une ligne *C E* parallèle au côté *B A*, & par le ſommet de l'angle *A*, une ligne *A E* parallèle au côté *B C*; ce qui forme avec les côtés *A B* & *B C*, un parallélogramme *A B C E* de même baſe & de même hauteur que le triangle *A B C*; cela poſé, il eſt aiſé de voir que les deux triangles *A B C*, *C E A* ſont égaux; car le côté *A C* leur eſt commun; d'ailleurs les angles *B A C*, *A C E*, ſont égaux, à cauſe des parallèles (38); & par la même raiſon, les angles *B C A* & *C A E* ſont égaux; ces deux triangles ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, ſont

donc égaux ; donc le triangle *ABC* eſt la moitié du parallélogramme *ABCE*.

135. *Les parallélogrammes* ABCD, EBCF (fig. 88 & 89) *de même baſe & de même hauteur, ſont égaux en ſurface.*

Les deux parallélogrammes *ABCD*, *EBCF* (*fig.* 88), ont une partie commune *EBCD* ; ainſi leur égalité ne dépend que de l'égalité des triangles *ABE*, *DCF* ; or il eſt aiſé de prouver que ces deux triangles ſont égaux : car *AB* eſt égal à *CD*, ces lignes étant des parallèles compriſes entre parallèles (82) ; & par la même raiſon, *BE* eſt égal à *CF* ; d'ailleurs (43) l'angle *ABE* eſt égal à l'angle *DCF* ; ces deux triangles ont donc un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ; ils ſont donc égaux ; donc auſſi le parallélogramme *ABCD* & le parallélogramme *EBCF* ſont égaux.

Dans la *figure* 89, on démontrera de la même manière que les deux triangles *ABE*, *DCF*, ſont égaux ; donc, retranchant de chacun le triangle *DIE*, les deux trapezes reſtans *ABID*, *EICF* ſeront égaux ; enfin ajoutant à chacun de ces trapezes le triangle *BIC*, le parallélogramme *ABCD* & le parallélogramme *EBCF* qui en réſulteront, ſeront égaux.

136. On peut donc dire auſſi, que *les triangles de même baſe & de même hauteur, ou de baſes égales & de hauteurs égales, ſont égaux.* Puiſqu'ils ſont moitiés de parallélogrammes de même baſe & de même hauteur qu'eux (134).

137. De cette dernière propoſition on peut conclure que *tout polygone peut être transformé en un*

triangle de même ſurface. Par exemple, ſoit *ABCDE* (*fig.* 90) un pentagone ; ſi l'on tire la diagonale *EC* qui joigne les extrémités de deux côtés contigus *ED*, *DC*, & qu'après avoir mené *DF* parallèle à *EC*, & qui rencontre en *F*, le côté *AE* prolongé, on tire *CF*, on aura un quadrilatère *ABCF* égal en ſurface au pentagone *ABCDE* ; car les deux triangles *ECD*, *ECF*, ont pour baſe commune *EC* ; & étant de plus compris entre mêmes parallèles *EC*, *DF*, ils ſont de même hauteur ; donc ils ſont égaux ; donc ſi l'on ajoute à chacun le quadrilatère *EABC*, on aura le pentagone *ABCDE* égal au quadrilatères *ABCF*.

Or de même qu'on vient de réduire le pentagone, à un quadrilatère, on réduira de même le quadrilatère à un triangle ; donc, &c.

De la meſure des Surfaces.

138. *Meſurer une ſurface*, c'eſt déterminer combien de fois cette ſurface contient une autre ſurface connue.

Les meſures qu'on emploie ſont ordinairement des quarrés ; quelquefois auſſi ce ſont des parallélogrammes rectangles : ainſi, meſurer la ſurface *ABCD* (*fig.* 91), c'eſt déterminer combien elle contient de quarrés tels que *abcd*, ou de rectangles tels que *abcd* ; ſi le côté *ab* du quarré *abcd* eſt d'un pied, c'eſt déterminer combien la ſurface *ABCD* contient de pieds quarrés ; ſi le côté *ab* du rectangle *abcd* étant d'un pied, le côté *bc* eſt de 3 pieds, c'eſt déterminer combien la ſurface *ABCD* contient de rectangles de 3 pieds de long ſur un pied de large.

Pour meſurer, en parties quarrées, la ſurface du rectangle *ABCD*, il faut chercher combien de

fois le côté AB contient le côté ab du quarré $abcd$ qui doit ſervir d'unité ou de meſure ; chercher de même combien de fois le côté BC contient ab ; & alors multipliant ces deux nombres l'un par l'autre, on aura le nombre de quarrés tels que $abcd$, que la ſurface $ABCD$ peut renfermer.

Par exemple, ſi AB contient ab, quatre fois ; & ſi BC contient ab, ſept fois ; je multiplie 7 par 4, & le produit 28 marque que le rectangle $ABCD$ contient 28 quarrés tels que $abcd$.

Car ſi par les points de diviſion E, F, G, on mène des parallèles à BC, on aura quatre rectangles égaux, dont chacun pourra contenir autant de quarrés, tels que $abcd$, qu'il y a de parties égales à ab dans le côté BC ; donc il faut répéter les quarrés contenus dans l'un de ces rectangles, autant de fois qu'il y a de rectangles ; c'eſt-à-dire, autant de fois que le côté AB contient ab ; & comme le nombre des quarrés contenus dans chaque rectangle, eſt le même que le nombre des parties de BC, il eſt donc évident qu'en multipliant le nombre des parties de BC, par le nombre des parties égales de AB, on a le nombre de quarrés tels que $abcd$, que le rectangle $ABCD$ peut renfermer.

Quoique nous ayons ſuppoſé dans le raiſonnement que nous venons de faire, que les côtés AB & BC contenoient un nombre exact de meſures ab, ce raiſonnement ne s'étend pas moins au cas où la meſure ab n'y ſeroit pas contenue exactement.

Par exemple, ſi BC ne contenoit que ſix meſures & $\frac{1}{2}$, chaque rectangle ne contiendroit que 6 quarrés & $\frac{1}{2}$; & ſi le côté AB ne contenoit que 3 meſures & $\frac{1}{3}$, il n'y auroit que 3 rectangles & $\frac{1}{3}$, chacun de 6 quarrés & $\frac{1}{2}$; il faudroit donc multiplier $6\frac{1}{2}$ par $3\frac{1}{3}$, c'eſt-à-dire, le nombre des meſures de BC par le nombre des meſures de AB.

Si au lieu d'évaluer la ſurface *ABCD* (*fig.* 91) en parties quarrées, on vouloit l'évaluer en parties rectangulaires *abcd*; un raiſonnement ſemblable fait voir qu'il faudra meſurer *AB* en parties telles que *ab*, & *BC* en parties telles que *bc*; & multiplier l'un par l'autre le nombre des parties de chaque eſpèce.

Par exemple, ſi on veut ſavoir combien il faut de ſauciſſons de 18 pieds de long, & de 11 pouces de groſſeur, pour le revêtement intérieur d'une batterie de mortier longue de 21 toiſes, & haute de 7 pieds 4 pouces; on verra que la groſſeur 11 pouces, eſt contenue 8 fois dans la hauteur 7 pieds 4 pouces; & que la longueur 18 pieds, eſt contenue 7 fois dans la longueur 21 toiſes; on multipliera donc 7 par 8, & le produit 56 exprimera le nombre cherché de ſauciſſons.

Au reſte lorſqu'il s'agit de meſurer une ſurface en parties rectangulaires, on peut le faire auſſi en meſurant d'abord en parties quarrées, & diviſant le nombre de ces parties par celui des meſures quarrées pareilles, que contient la meſure rectangulaire que l'on emploie.

139. Puiſque (135) le parallélogramme rectangle *ABCD*, (*fig.* 88 & 89) eſt égal au parallélogramme *EBCF* de même baſe & de même hauteur; il s'enſuit donc que pour avoir la ſurface de celui-ci, il faudra multiplier le nombre des parties de ſa baſe *BC*, par le nombre des parties de ſa hauteur *BA*; on peut donc dire en général.....

Pour avoir le nombre de meſures quarrées contenues dans la ſurface d'un parallélogramme quelconque ABCD, (fig. 79), *il faut meſurer la baſe* BC *& la hauteur* EF, *avec une même meſure, & multiplier le nombre des meſures de la baſe, par le nombre des meſures de la hauteur.*

On voit donc, par ce qui a été dit (138), que lorſqu'on veut évaluer la ſurface *ABCD*,

(*fig.* 91), on ne fait autre choſe que répéter la ſurface *GBCH* ou le nombre des quarrés qu'elle contient, autant de fois que ſon côté *GB* eſt contenu dans le côté *AB*; ainſi le multiplicande eſt réellement une ſurface, & le multiplicateur eſt un nombre abſtrait qui ne fait que marquer combien de fois on doit répéter ce multiplicande.

On dit cependant très-communément, que *pour avoir la ſurface d'un parallélogramme, il faut multiplier ſa baſe par ſa hauteur*; mais on doit regarder cela comme une expreſſion abrégée, dans laquelle on ſous-entend le *nombre* des quarrés correſpondans aux parties de la baſe & le *nombre* des parties de la hauteur. En un mot, on ne peut pas dire qu'on multiplie une ligne par une ligne. Multiplier, c'eſt prendre un certain nombre de fois; de ſorte que quand on multiplie une ligne on ne peut jamais avoir qu'une ligne; & quand on multiplie une ſurface, on ne peut jamais avoir qu'une ſurface. Une ſurface ne peut avoir d'autres élémens que des ſurfaces, & quoiqu'on diſe ſouvent que le parallélogramme *ABCD*, (*fig.* 79) peut-être conſidéré comme compoſé d'autant de lignes égales & parallèles à *BC*, qu'il y a de points dans la hauteur *EF*, on doit ſous-entendre que ces lignes ont une largeur infiniment petite; (car pluſieurs lignes ſans largeur ne peuvent pas compoſer une ſurface); & alors chacune de ces lignes eſt une ſurface qui étant répétée autant de fois que ſa hauteur eſt dans la hauteur *EF*, donne la ſurface *ABCD*.

Nous adopterons néanmoins cette expreſſion, *multiplier une ligne par une ligne*; mais on doit ne pas perdre de vue que ce n'eſt que comme manière abrégée de parler. Ainſi nous dirons que le produit de deux lignes exprime une ſurface, quoique dans le vrai on dût dire, le *nombre* des parties d'une ligne multiplié par le *nombre* des parties d'une autre ligne, exprime le nombre de parties quarrées contenues dans le parallélogramme qui auroit une de ces lignes pour hauteur, & l'autre ligne pour baſe.

Pour marquer la ſurface du parallélogramme *ABCD* (*fig.* 79), nous écrirons $BC \times EF$; dans la *figure* 81, nous écrirons $AB \times BC$; & dans la *figure* 82, ou les deux côtés *AB* & *BC* ſont égaux, au lieu de $AB \times BC$ ou $AB \times AB$, nous écrirons $\overline{AB}^2$; de ſorte que $\overline{AB}^2$ ſignifiera la ligne *AB* multipliée par elle-même, ou la ſurface du quarré fait ſur la ligne *AB*; de même, pour marquer que la ligne *AB* eſt

élevée au cube, nous écrirons $\overline{AB}^3$, qui équivaudra à $AB \times AB \times AB$ ou à $\overline{AB}^3 \times AB$.

140. Il ſuit de ce que nous venons de dire, que pour que deux parallélogrammes ſoient égaux en ſurface, il ſuffit que le produit de la baſe de l'un, multipliée par la hauteur, ſoit égal au produit de la baſe du ſecond, multipliée par la hauteur. Donc, *lorſque deux parallélogrammes ſont égaux en ſurface, ils ont leurs baſes réciproquement proportionnelles à leurs hauteurs*; c'eſt-à-dire, que la baſe & la hauteur de l'un peuvent être conſidérées comme les extrêmes d'une proportion, dont la baſe & la hauteur de l'autre formeront les moyens; car en les conſidérant ainſi, le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens; or dans ce cas il y a néceſſairement proportion (*Arith.* 170).

Au reſte, on peut voir cette vérité immédiatement, en faiſant attention que ſi la baſe de l'un eſt plus petite, par exemple, que celle de l'autre, il faut que ſa hauteur ſoit plus grande à proportion pour former le même produit.

141. Puiſqu'un triangle eſt la moitié d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur, (134), il ſuit de ce qui vient d'être dit (139), que *pour avoir la ſurface d'un triangle, il faut multiplier la baſe par la hauteur, & prendre la moitié du produit.*

Ainſi ſi la hauteur AD (*fig.* 85 & 86), eſt de 34 pieds, & la baſe BC de 52, la ſurface contiendra 884 pieds quarrés; c'eſt la moitié du produit de 52 par 34.

Il eſt inutile, je penſe, d'inſiſter pour faire ſentir qu'on aura le même produit en multipliant la baſe par la moitié de la hauteur, ou la hauteur par la moitié de la baſe.

Et pour transformer un triangle en un quarré de même ſurface ; la queſtion ſe réduit donc à prendre (122) ou (*Arith.* 168) une moyenne proportionnelle entre la baſe & la moitié de la hauteur ; puiſque (*Arith.* 168) le quarré de cette moyenne proportionnelle ſera égal au produit de ces deux facteurs.

On peut donc transformer une figure quelconque en un quarré de même ſurface.

142. Donc 1°. *pour avoir la ſurface du trapeze*, il faut ajouter enſemble les deux côtés parallèles, prendre la moitié de la ſomme, & la multiplier par la perpendiculaire menée entre ces deux parallèles. Car ſi l'on tire la diagonale BD (*fig.* 84), on a deux triangles ABD, BDC, dont la hauteur commune eſt EF. Pour avoir la ſurface du triangle ABD, il faudroit donc multiplier la moitié de AD par EF ; & pour le triangle BDC, il faudroit multiplier la moitié de BC auſſi par EF ; donc la ſurface du trapeze vaut la moitié de AD multipliée par EF, plus la moitié de BC multipliée par EF ; c'eſt-à-dire, la moitié de la ſomme AD plus BC multipliée par EF.

Si par le milieu G de la ligne AB, on tire GH parallèle à BC, cette ligne GH ſera la moitié de la ſomme des deux lignes AD & BC. Car, ſoit I le point où GH coupe la diagonale BD, les triangles BAD, BGI, ſemblables, à cauſe des parallèles AD & GI, font connoître (109) que GI eſt moitié de AD, puiſque BG eſt moitié de AB. Or GH étant parallèle à BC & à AD, DC (102) eſt coupée de la même manière que AB ; on prouvera donc de même que IH eſt moitié de BC, en conſidérant les triangles ſemblables BDC & IDH.

Donc, & en vertu de ce qui a été dit ci-deſſus, on peut dire que la *ſurface d'un trapeze* A B C D, *eſt égal au produit de ſa hauteur* E F, *par la ligne* G H *menée à diſtances égales des deux baſes oppoſées.*

143. 2°. *Pour avoir la ſurface d'un polygone quelconque*, il faut le partager en triangles par des lignes menées d'un même point à chacun de ſes angles, & calculer ſéparément la ſurface de chacun de ces triangles; en réuniſſant tous ces produits, on aura la ſurface totale du poligone. Mais pour avoir le moindre nombre de triangles qu'il ſoit poſſible, il conviendra de faire partir toutes ces lignes de l'un des angles; *voyez fig.* 53.

144. *Si le polygone étoit régulier* (*fig.* 78); comme tous les côtés ſont égaux, & que toutes les perpendiculaires menées du centre, ſont égales; en le concevant compoſé de triangles qui ont leur ſommet au centre, on auroit la ſurface en multipliant un des côtés par la moitié de la perpendiculaire, & multipliant ce produit par le nombre des côtés; ou, ce qui revient au même, en multipliant le contour par la moitié de la perpendiculaire.

145. Puiſqu'on peut (131) conſidérer le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, il faut donc conclure que *pour avoir la ſurface d'un cercle, il faut multiplier la circonférencc par la moitié du rayon.*

Car la perpendiculaire menée ſur un des côtés, ne diffère pas du rayon, lorſque le nombre des côtés eſt infini.

146. Puiſque les circonférences des cercles ſont entr'elles comme les rayons ou comme les diamètres (131), il eſt viſible que ſi l'on connoiſſoit la circonférence d'un cercle d'un diamètre

connu, on ſeroit bientôt en état de déterminer la circonférence de tout autre cercle dont on connoîtroit le diamètre, puiſqu'il ne s'agiroit que de calculer le quatrième terme de cette proportion ; *le diamètre de la circonférence connue, eſt à cette même circonférence, comme le diamètre de la circonférence cherchée, eſt à cette ſeconde circonférence.*

On ne connoît point exactement le rapport du diamètre à la circonférence ; mais on en a des valeurs aſſez approchées, pour qu'un rapport plus exact puiſſe être regardé comme abſolument inutile dans la pratique.

Archimede a trouvé qu'un cercle qui auroit 7 pieds de diamètre, auroit 22 pieds de circonférence, à très-peu de choſe près. Ainſi, ſi l'on demande qu'elle ſera la circonférence d'un cercle qui auroit 20 pieds de diamètre, il faut chercher (*Arith.* 169) le quatrième terme de la proportion, dont les trois premiers ſont

7 : 22 :: 20 :

Ce quatrième terme qui eſt $62\frac{6}{7}$, eſt à très-peu de choſe près, la longueur de la circonférence d'un cercle de 20 pieds de diamètre. Je dis à très-peu de choſe près ; car il faudroit que le cercle n'eût pas moins de 800 pieds de diamètre, pour que la circonférence déterminée d'après le rapport de 7 à 22, fût fautive d'un pied. Au reſte, en employant le rapport de 7 à 22, on peut ſe diſpenſer de faire la proportion ; il ſuffit de tripler le diamètre, & d'ajouter au produit la ſeptième partie de ce même diamètre ; parce que $3\frac{1}{7}$ eſt le nombre de fois que 22 contient 7.

Adrien Métius a donné un rapport beaucoup plus approché ; c'eſt celui de 113 à 355. Ce rapport eſt tel, qu'il faudroit que le diamètre d'un cercle fût de 3000000 pieds au moins, pour qu'on fît, en ſe ſervant de ce rapport, une erreur d'un pied ſur la circonférencee *. Enfin, ſi l'on veut avoir la circonférence, avec encore plus de préciſion, il n'y a qu'à employer le rapport de 1 à 3,141592653589793 2, qui paſſe de beaucoup les limites des beſoins ordinaires, & dont on peut ſupprimer plus ou moins de chiffres ſur la droite, ſelon qu'on a moins ou plus beſoin d'exactitude. Comme ce rapport a pour premier terme l'unité, il eſt aſſez commode en ce que, pour trouver la circonférence d'un cercle propoſé, l'opération ſe réduit à multiplier le nombre 3,1415926, par le diamètre de ce cercle.

Il eſt donc facile, actuellement, de trouver la ſurface d'un

* Pour retenir aiſément ce rapport, il faut faire attention que les nombres qui le compoſent, ſe trouvent, en partageant en deux parties égales, les trois premiers nombres impairs 1, 3, 5 écrits deux fois de ſuite en cette manière 113355.

cercle proposé, du moins aussi exactement que peuvent l'exiger les besoins les plus étendus de la pratique.

Si l'on demande de combien de pieds quarrés est la surface d'un cercle qui auroit 10 pieds de diamètre ; je calcule sa circonférence comme ci-dessus ; & ayant trouvé qu'elle est de 62 pieds & $\frac{6}{7}$, je multiplie $62\frac{6}{7}$, par 5 qui est la moitié du rayon (145), & j'ai $314\frac{2}{7}$ pieds quarrés, pour la surface de ce cercle.

147. On appelle *secteur de cercle* la surface comprise entre deux rayons *IA*, *IB* (*fig.* 78), & l'arc *AVB*. Et on appelle *segment* la surface comprise entre l'arc *AVB* & sa corde *AB*.

Puisque le cercle peut être considéré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, un secteur de cercle peut donc être considéré comme une portion de polygone régulier, & sa surface comme composée d'une infinité de triangles qui ont tous leur sommet au centre, & pour hauteur le rayon. Donc, *pour avoir la surface d'un secteur de cercle*, il faut multiplier l'arc qui lui sert de base, par la moitié du rayon.

148. A l'égard du segment, il est évident que pour en avoir la surface, il faut retrancher la surface du triangle *IAB*, de celle du secteur *IAVB*.

149. Il est évident que, dans un même cercle, les longueurs des arcs sont proportionnelles à leurs nombres de degrés ; que par conséquent, quand on connoît la longueur de la circonférence, on peut avoir celle d'un arc de tel nombre de degrés qu'on voudra, en faisant cette proportion : *360 degrés sont au nombre de degrés de l'arc dont on cherche la longueur, comme la longueur de la circonférence, est à celle de ce même arc.*

150. S'il s'agit de trouver la surface d'un secteur dont on connoît le nombre de degrés & le rayon ; on cherchera, par la

proportion qu'on vient de donner, la longueur de l'arc qui eſt la baſe de ce ſecteur, & on la multipliera par la moitié du rayon. Par exemple, ſi l'on demande quelle eſt la ſurface du ſecteur de $32^d\ 40'$ dans un cercle qui a 20 pieds de diamètre, on trouvera, comme ci-deſſus (*146*), que la circonférence eſt de $62\frac{6}{7}$ pieds; cherchant le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers ſont $360^d : 32^d\ 40' :: 62\frac{6}{7}$: ce quatrième terme qu'on trouvera de $5\frac{10}{27}$, ſera la longueur de l'arc de $32^d\ 40'$, laquelle, étant multipliée par 5, moitié du rayon, donne $28\frac{14}{27}$ pour la ſurface du ſecteur de $32^d\ 40'$.

Du Toiſé des Surfaces.

151. Ce qu'on entend par *Toiſé* des ſurfaces, c'eſt la méthode de faire les multiplications néceſſaires pour évaluer les ſurfaces, lorſqu'on a meſuré les dimenſions en toiſes & parties de toiſes.

Il y a deux manières d'évaluer les ſurfaces, en toiſes quarrées & parties de la toiſe quarrée.

Dans la première, on compte par toiſes quarrées, pieds quarrés, pouces quarrés, lignes quarrées, &c.

La toiſe quarrée contient 36 pieds quarrés, parce que c'eſt un rectangle qui a 6 pieds de long ſur 6 pieds de large. Le pied quarré contient 144 pouces quarrés, parce que c'eſt un rectangle qui a 12 pouces de long ſur 12 pouces de large. Par une raiſon ſemblable, on voit que le pouce quarré vaut 144 lignes quarrées, &c.

Ainſi, pour évaluer une ſurface en toiſes quarrées & parties quarrées de la toiſe quarrée, il n'y a autre choſe à faire qu'à réduire les deux dimenſions qu'on doit multiplier, chacune à la plus petite eſpèce (en lignes, ſi la plus petite eſpèce eſt des lignes); & après avoir fait la multiplication, on réduira le produit en pouces quarrés, enſuite en pieds quarrés, & enfin en toiſes quarrées, en diviſant ſucceſſivement par 144, 144 & 36.

Par exemple, pour trouver la ſurface d'un rectangle qui

auroit 2to 3^{pi} 5^{po} de long, & 0to 4^{pi} 6^{po} de large; j'opère comme il ſuit.....

2to 3^{pi} 5^{po} font..... 185^{po}
0. 4. 6. font..... 54

740
925

dont le produit eſt.....9990 pouces quarrés

diviſant par 144.....9990 { 144 / 69 pieds quarrés
1350
54

diviſant 69 par 36..... 69 { 36 / 1 toiſe quarrée
33

ainſi la ſurface eſt..... 1^{TT}. 33^{PP}. 54^{FP}.

152. Dans la ſeconde manière d'évaluer les ſurfaces, en toiſes quarrées & parties de la toiſe quarrée, on conçoit la toiſe quarrée compoſée de ſix rectangles qui ont tous une toiſe de haut & un pied de baſe, & que pour cette raiſon, on nomme *Toiſes-pieds* : on ſubdiviſe chaque toiſe-pied en 12 parties ou rectangles qui ont chacun une toiſe de haut & un pouce de baſe, & qu'on appelle *Toiſes-pouces* : on ſubdiviſe chacune de celles-ci en 12 parties qui ont chacune une toiſe de haut & une ligne de baſe, & qu'on appelle *Toiſes-lignes* ; en un mot, on ſe repréſente la toiſe diviſée & ſubdiviſée continuellement en rectangles, qui ont conſtamment une toiſe de haut ſur un pied, ou un pouce, ou une ligne, ou un point de baſe. Les ſubdiviſions qui paſſent le point, ſe marquent comme les ſecondes, tierces, quartes, &c. pour les degrés, excepté qu'on en fait précéder la marque par un T ſigne de la toiſe.

Quand on aura donc à multiplier les parties de deux lignes, pour évaluer une ſurface ; il faut concevoir que les toiſes du multiplicande ſont des

toiſes quarrées ; les pieds, des toiſes-pieds ; les pouces, des toiſes-pouces, & ainſi de ſuite ; à l'égard du multiplicateur, il repréſentera toujours combien de fois on doit prendre le multiplicande.

Cette obſervation faite, il n'eſt plus queſtion que d'exécuter les règles que nous avons données en Arithmétique, ſous le nom de *Multiplication des Nombres complexes.*

EXEMPLE.

On demande la ſurface d'un rectangle qui a $52^{T.}\ 4^{P.}\ 5$ de longueur, & $44^{to.}\ 4^{P.}\ 8^{Po.}$ de largeur.

Je conſidérerai $52^{to.}\ 4^{P.}\ 5^{Po.}$ comme $52^{TT.}\ 4^{TP.}\ 5^{Tpo.}$ & le multiplicateur $44^{to.}\ 4^{P.}\ 8^{Po.}$ comme un nombre abſtrait ; & j'opérerai comme il ſuit.

$52^{TT}\ 4^{Tp}\ 5^{Tp}$
$44^{T}\ 4^{p}\ 8^{p}$

$208^{TT}\ 0^{Tp}\ 0^{Tp}\ 0^{Tl}\ 0^{Tpt.}$
208

Pour 3^{Tp}.....	22.				
Pour 1^{Tp}.....	7.	2.			
Pour 4^{Tp}.....	2.	2.	8.		
Pour 1^{Tp}.....	0.	3.	8.		
Pour 3^{p}	26.	2.	2.	6.	
Pour 1^{p}	8.	4.	8.	10.	
Pour 4^{p}	2.	5.	6.	11.	4
Pour 4^{p}	2.	5.	6.	11.	4

$2361^{TT}\ 2^{TP}\ 5^{Tp}\ 2^{Tl}\ 8^{Tpt}$

153. Quand on a ainſi évalué une ſurface, en toiſes-quarrées, toiſes-pieds, toiſes-pouces, &c. il eſt fort aiſé d'en trouver la valeur en toiſes quarrées, pieds quarrés, pouces quarrés, &c. Il faut écrire alternativement les deux nombres 6 & $\frac{1}{2}$ ſous les parties de la toiſe, à commencer des toiſes-pieds, comme on le voit ci-deſſous ; multiplier chaque partie, par le nombre inférieur qui lui répond, & porter les produits des deux nombres conſécutifs

6 & $\frac{1}{2}$ dans une même colonne ; lorſqu'en multipliant par $\frac{1}{2}$ il reſtera 1, écrivez 72 ſous ce multiplicateur $\frac{1}{2}$, pour commencer une ſeconde colonne.

Ainſi, pour réduire en toiſes quarrées, pieds quarrés, pouces quarrés, &c. les parties du produit que nous avons trouvé ci-deſſus, j'écris :

$$\begin{array}{llllll} 2361^{TT} & 2^{TP} & 5^{Tp} & 2^{Tl} & 8^{Tpt} & \\ & 6 & \frac{1}{2} & 6 & \frac{1}{2} & \\ \hline 2361^{TT} & 12^{PP} & 72^{pp} & & & \\ & 2 & 12 & & & \\ & & & 4 & & \\ \hline 2361^{TT} & 14^{PP} & 88^{pp} & & & \end{array}$$

Et je multiplie les toiſes-pieds par 6, parce que la toiſe-pied vaut 6 pieds quarrés, ayant 6 pieds de haut ſur un pied de baſe. Je multiplie les toiſes-pouces par $\frac{1}{2}$, & je porte les deux entiers, que me donne cette multiplication, au rang des pieds quarrés, parce que la toiſe-pouce étant la 12e partie de la toiſe-pied, doit valoir la 12e partie de 6 pieds quarrés, c'eſt-à-dire, un demi-pied quarré ; donc les 5 toiſes-pouces valent 2 pieds quarrés & demi ; & comme le demi-pied quarré vaut 72 pouces, au lieu du demi, j'écris 72 ; enſuite pour réduire les toiſes-lignes, je les multiplie par 6, parce que la toiſe-ligne étant la 12e partie de la toiſe-pouce, doit valoir la 12e partie de 72 pouces quarrés ; c'eſt à-dire, 6 pouces quarrés ; un raiſonnement ſemblable prouve qu'on doit multiplier enſuite par $\frac{1}{2}$, puis par 6, &c. ainſi que nous venons de le dire.

154. Donc réciproquement, ſi l'on veut réduire en toiſes-pieds, toiſes-pouces, &c. des parties quarrées de la toiſe quarrée, l'opération ſe réduira 1°. à prendre le ſixième du nombre des pieds quarrés ; ce qui donnera des toiſes-pieds. 2°. On doublera le reſte, s'il y a en un, & on ajoutera une unité ſi le nombre des pouces quarrés, eſt, ou excède 72 ; & l'on aura les toiſes-pouces. 3°. Ayant retranché 72, du nombre des pouces quarrés, lorſque ce nombre ſera ou excèdera 72, on diviſera le reſte, par 6, & l'on aura les toiſes-lignes.

4°. On doublera le reſte, & on y ajoutera une unité, ſi le nombre des lignes quarrées excède 72; & on aura le nombre des toiſes-points. On voit par-là comment on doit continuer, pour avoir les parties ſuivantes lorſqu'il doit y en avoir.

Ainſi ſi l'on propoſoit de réduire $52^{TT}\,25^{TP}\,87^{PP}\,92^{II}$, en toiſes-pieds, toiſes-pouces, &c. je diviſerois 25 par 6, & j'aurois 4^{TP}, & 1 de reſte; je double cet 1, & j'y ajoute 1, parce que le nombre des pouces quarrés excède 72; j'ai donc 3^{TP}. Je retranche 72 de 87, & je diviſe le reſte 15, par 6; j'ai 2^{TI}, & 3 de reſte. Je double ce reſte, & j'y ajoute une unité, parce que le nombre des lignes quarrées excède 72; j'ai 7^{TPII}. Je retranche 72 de 92, & je diviſe le reſte 20, par 6; j'ai $3^{T'}$, & 2 de reſte; je double ce reſte, & j'ai $4^{T''}$; en ſorte que j'ai en total, $52^{TT}\,4^{TP}\,3^{TP}\,2^{TI}\,7^{TPII}\,3^{T'}\,4^{T''}$.

155. Puiſque, pour avoir la ſurface d'un parallélogramme, il faut multiplier le nombre des parties de la baſe, par le nombre des parties de la hauteur; il s'enſuit (*Arith.* 67) que ſi connoiſſant la ſurface & le nombre des parties de la hauteur ou de la baſe, on veut avoir la baſe ou la hauteur, il faudra diviſer le nombre qui exprime la ſurface, par le nombre qui exprime celle des deux dimenſions qui ſera connue. Mais il faut bien obſerver que ce n'eſt point une ſurface que l'on diviſe alors par une ligne; la diviſion d'une ſurface par une ligne, n'eſt pas moins chimérique que la multiplication d'une ligne, par une ligne. Ce que l'on fait véritablement alors, on diviſe une ſurface par une ſurface.

En effet, ſelon ce que nous avons dit (139) lorſqu'on évalue la ſurface du rectangle *ABCD* (*fig.* 91) on répète la ſurface du rectangle *ED* de même baſe, & qui a pour hauteur, l'unité ou la meſure principale *AE*, on répète, dis-je, cette ſurface autant de fois que ſa hauteur *AE* eſt compriſe dans la hauteur *AB*; ainſi quand on veut connoître le nombre de parties de *AB*, ou le nombre des unités *AE* qu'il contient,

il faut chercher combien de fois la ſurface *ABCD* contient celle du rectangle *ED*. Donc ſi la ſurface *ABCD* étant exprimée par $361^{TT}\ 2^{TP}\ 5^{TP}\ 2^{TI}\ 8^{TPT}$, la baſe *AD* eſt de $4^{T}\ 3^{P}\ 6^{P}$; pour avoir la hauteur *AB*, il faut concevoir que l'on a $361^{TT}\ 2^{TP}$, &c. à diviſer, non par $4^{T}\ 3^{P}\ 6^{P}$, mais par $4^{TT}\ 3^{TP}\ 6^{TP}$; & comme la toiſe eſt alors facteur commun du dividende & du diviſeur, il eſt évident que le quotient ſera le même que ſi l'un & l'autre exprimoient des toiſes & parties de toiſes linéaires; donc l'opération ſe réduit à diviſer $361^{T}, 2^{P}$, &c. par $4^{T}\ 3^{P}$, &c. C'eſt-à-dire, que l'on conſidèrera le dividende & le diviſeur, comme exprimant des toiſes linéaires, & par conſéquent comme étant de même eſpèce; & comme l'état de la queſtion fait voir que le quotient doit auſſi être de cette même eſpèce, c'eſt-à-dire, exprimer des toiſes & parties de toiſes linéaires, il s'enſuit que la diviſion doit ſe faire alors préciſément ſelon la règle donnée (*Arith.* 120 & 122).

Si la ſurface étoit donnée en toiſes quarrées & parties quarrées de la toiſe quarrée; alors, pour plus de ſimplicité, on réduiroit ces parties en toiſes-pieds, toiſes-pouces, &c. par ce qui vient d'être dit (154); après quoi on opéreroit comme dans le cas précédent. Par exemple, ſi l'on demande la hauteur d'un parallélogramme ou d'un rectangle qui auroit $2^{T}\ 5^{P}$ de baſe, & $120^{TT}\ 29^{TP}\ 54^{PP}$ de ſurface. On réduira (154) cette ſurface à $120^{TT}\ 4^{TP}\ 10^{TP}\ 9^{TI}$; & la queſtion, d'après ce qui précède, ſera réduite à diviſer $120^{T}\ 4^{P}\ 10^{TP}\ 9^{l}$, par $2^{T}\ 5^{P}$, ce qui en ſuivant la règle donnée (*Arith.* 120 & 122) donne $42^{T}\ 3^{P}\ 10^{P}\ 1^{l}\frac{11}{17}$.

De la Comparaiſon des Surfaces.

156. *Les ſurfaces des parallélogrammes ſont entr'elles, en général, comme les produits des baſes par les hauteurs.*

C'eſt-à-dire, que la ſurface d'un parallélogramme, contient celle d'un autre parallélogramme, autant que le produit de la baſe du premier par ſa hauteur, contient le produit de la baſe du ſecond par ſa hauteur.

Cela eſt évident, puiſque tout parallélogramme eſt égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur.

De-là il eſt aiſé de conclure que *lorſque deux parallélogrammes ont même hauteur, ils ſont entr'eux*

comme leurs baſes ; & que *lorſqu'ils ont même baſe, ils ſont entr'eux comme leurs hauteurs.* Car le rapport des produits ne changera point ſi l'on omet, dans chacun, le facteur qui leur eſt commun (*Arith.* 160).

157. Selon ce qui a été dit (145), la ſurface du cercle eſt égale à celle d'un triangle qui auroit pour hauteur le rayon, & pour baſe la circonférence ; & par conſéquent égale à un rectangle qui auroit pour hauteur le rayon & pour baſe la demi-circonférence. Donc ſi l'on compare ce rectangle au quarré du rayon, qui eſt un rectangle de même hauteur, on verra évidemment (156) que le *quarré du rayon eſt à la ſurface du cercle, comme le rayon eſt à la demi-circonférence.* Ainſi pour avoir la ſurface d'un cercle, il ſuffit de multiplier le quarré de ſon rayon, par le rapport de la demi-circonférence au rayon, ou de la circonférence au diamètre.

Ainſi dans l'exemple donné (146), je multiplie 100, quarré du rayon 10, par $\frac{22}{7}$, ce qui me donne $\frac{2200}{7}$ ou $314\frac{2}{7}$ pieds quarrés pour la ſurface du cercle qui a 20 pieds de diamètre.

158. Puiſque les triangles ſont (134) moitié de parallélogrammes de même baſe & de même hauteur, il faut donc conclure que *les triangles de même hauteur ſont entr'eux comme leurs baſes ; & les triangles de même baſe, ſont entr'eux comme leurs hauteurs.*

159. *Les ſurfaces des parallélogrammes ou des triangles ſemblables, ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.*

Car les ſurfaces des deux parallélogrammes *ABCD* & *abcd* (*fig.* 92) ſont entr'elles (156) comme

les produits des baſes par leurs hauteurs; c'eſt-à-dire, que $ABCD : abcd :: BC \times AE : bc \times ae$. Mais les parallélogrammes $ABCD$, $abcd$, étant ſemblables, les triangles AEB, aeb, ſeront ſemblables, parce qu'outre l'angle droit en E & en e, ils doivent avoir de plus l'angle B égal à l'angle b; on aura donc (109) $AE : ae :: AB : ab$.

D'ailleurs à cauſe des parallélogrammes ſemblables, on a $BC : bc :: AB : ab$.

Multipliant ces deux proportions (*Arith.* 180.) on aura $BC \times AE : bc \times ae :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; donc $ABCD : abcd :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$.

160. A l'égard des triangles ſemblables, il eſt évident qu'ils ont la même propriété, puiſqu'ils ſont moitiés de parallèlogrammes de même baſe & de même hauteur.

161. En général, *les ſurfaces des deux figures ſemblables quelconques, ſont entr'elles comme les quarrés des côtés, ou des lignes homologues de ces figures.*

Car les ſurfaces des deux figures ſemblables peuvent toujours être regardées comme compoſées d'un même nombre de triangles ſemblables chacun à chacun; alors la ſurface de chaque triangle de la première figure, ſera à celle du triangle correſpondant dans la ſeconde, comme le quarré d'un côté du premier, eſt au quarré du côté homologue du ſecond (160); donc, puiſque tous les côtés homologues étant en même rapport, leurs quarrés doivent être auſſi tous en même rapport (*Arith.* 181), chaque triangle du premier polygone ſera au triangle correſpondant du ſecond, comme le quarré d'un côté quelconque du premier polygone, eſt au

quarré du côté homologue du ſecond ; donc (*Arith.* 176) la ſomme de tous les triangles du premier, ſera à la ſomme de tous les triangles du ſecond, ou la ſurface du premier, à la ſurface du ſecond, auſſi dans ce même rapport.

162. *Les ſurfaces des cercles ſont donc entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres.*

Car les cercles ſont des figures ſemblables (131), dont les rayons & les diamètres ſont des lignes homologues.

On doit dire la même choſe des ſecteurs & des ſegmens de même nombre de degrés.

On voit donc qu'il n'en eſt pas des ſurfaces des figures ſemblables, comme de leurs contours ; les contours ſuivent le rapport ſimple des côtés (129) ; c'eſt-à-dire, que de deux figures ſemblables, ſi un côté de l'une eſt double, ou triple, ou quadruple, &c. d'un côté homologue de l'autre, le contour de la première ſera auſſi double, ou triple, ou quadruple du contour de la ſeconde ; mais il n'en eſt pas ainſi des ſurfaces ; celle de la première figure ſeroit alors 4 fois, 9 fois, 16 fois, &c. auſſi grande que celle de la ſeconde.

163. Si l'on vouloit donc conſtruire une figure ſemblable à une autre, & dont la ſurface fût à celle de celle-ci, dans un rapport donné, par exemple, dans le rapport de 2 à 3 ; il ne faudroit pas faire les côtés homologues, dans le rapport de 2 à 3, car alors les ſurfaces ſeroient comme 9 à 4 ; mais il faudroit faire ces côtés, de telle grandeur que leurs quarrés fuſſent entr'eux :: 2 : 3 ; c'eſt-à-dire, en ſuppoſant qu'un côté de la figure donnée ſoit de 50^p, par exemple, il faudroit, pour trouver le côté homologue de la figure cherchée x, calculer le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers ſeroient $3 : 2 :: \overline{50}^2$ ou 50×50 eſt à un quatrième terme ; ce quatrième terme qui eſt $1666\frac{2}{3}$ ſeroit le quarré du côté cher-

$3 : 2 :: 50^2 : x^2$.

$x^2 = \frac{5002}{3} = 1666\frac{2}{3}$

ché ; c'eſt pourquoi, tirant la racine quarrée (*Arith.* 137) de $1666\frac{2}{3}$, on trouveroit 40'', 824, c'eſt-à-dire, $40^{p}\ 9^{p}\ 10^{l}$ à peu-près, pour ce côté cherché. Quand on a un côté de la figure, il eſt aiſé de conſtruire cette figure, ſelon ce qui a été dit (128).

La même méthode peut être employée à *déterminer le rayon d'un cercle qui auroit une ſurface propoſée.*

On prendra arbitrairement un nombre que l'on conſidérera comme le rayon d'un cercle, dont on calculera la ſurface par ce qui a été dit (145). Puis on fera cette proportion..... *La ſurface calculée eſt à la ſurface donnée, comme le quarré du rayon connu de la première, eſt au quarré du rayon inconnu de la ſeconde.*

On peut auſſi trouver ce rayon, par la propoſition donnée (157).

164. *Si ſur les trois côtés* AB, BC, AC, *d'un triangle rectangle* ABC, (fig. 93), *on conſtruit trois quarrés* BEFA, BGHC, AILC; *celui qui occupera l'hypothénuſe, vaut toujours la ſomme des deux autres.*

Abaiſſons de l'angle droit *B*, ſur l'hypothénuſe *AC*, la perpendiculaire *BD*; les deux triangles *BDA*, *BDC* ſeront chacun ſemblables au triangle *ABC* (112); & par conſéquent les ſurfaces de ces trois triangles ſeront entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues; on a donc cette ſuite de rapports égaux $ABD : \overline{AB}^{2} :: BDC : \overline{BC}^{2} :: ABC : \overline{AC}^{2}$ ou $ABD : ABEF :: BDC : BGHC :: ABC : AILC$; donc (*Arith.* 176) $ABD + BDC : ABEF + BGHC :: ABC : AILC$. Or il eſt évident que *ABC* vaut les deux parties $ABD + BDC$; donc *AILC* vaut $ABEF + BGHC$, ce qu'on peut encore exprimer en cette manière. $\overline{AC}^{2}$ vaut $\overline{AB}^{2} + \overline{BC}^{2}$.

165 Puiſque le quarré de l'hypothénuſe vaut la ſomme des quarrés des deux côtés de l'angle droit, concluons donc que *le quarré d'un des côtés*

de l'angle droit, vaut le quarré de l'hypothénuſe, moins le quarré de l'autre côté; c'eſt-à-dire, que $\overline{BC}^2$ *vaut* $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$, & $\overline{AB}^2$ *vaut* $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$.

166. Donc, *lorſqu'on connoît deux côtés d'un triangle rectangle, on peut toujours calculer le troiſième.*

Suppoſons, par exemple, qu'on demande la longueur du talus intérieur d'un rempart qui auroit 18 pieds de baſe, & 12 pieds de hauteur.

J'ajoute le quarré de 18.....	324.
Avec le quarré de 12.....	144.
La ſomme.....	468.

Eſt le quarré de la longueur du talus, dont la racine 21,6 ſera la longueur demandée.

Suppoſons pour ſecond exemple, que *A* (*fig.* 94) ſoit un fourneau de mine, auquel on communique par la galerie *DB*, & le rameau *BA* de 9 pieds. L'effet de la poudre étant ſuppoſé pouvoir s'étendre en tous ſens, à une diſtance de 25 pieds, il faut trouver quelle partie *BC*, de la galerie, on doit bourrer pour que la galerie réſiſte autant que le reſte du terrein.

Il eſt clair qu'on doit bourrer juſqu'à une diſtance *BC* telle que *AC* ſoit de 25 pieds; *BC* eſt un côté de l'angle droit du triangle rectangle *ABC*; on l'aura donc comme il ſuit :

Du quarré de 25.....	625.
Je retranche celui de 9.....	81.
Le reſte.....	544.

Eſt le quarré de *BC*; & ſa racine 23,3 eſt la longueur que doit avoir *BC*.

167. On peut faire uſage de la propriété du quarré de l'hypothénuſe pour élever facilement une perpendiculaire ſur une ligne droite, en un point donné.

Par exemple, ſur le prolongement *EA* de la face d'un baſtion (*fig.* 95) on veut établir perpendiculairement une batterie au point *A*. On formera, avec un cordeau, un triangle *ABC*, en prenant *AB* de 3 toiſes par exemple, & faiſant *AC* de 4 toiſes; & *BC* de 5 toiſes; ce qui eſt facile. Alors *AC* ſera perpendiculaire ſur *BA*; car le quarré de 5 vaut le quarré de 4; plus le quarré de 3.

168. Puiſque le quarré de l'hypothénuſe vaut la ſomme des quarrés des deux côtés de l'angle droit, il s'enſuit que ſi le triangle rectangle eſt iſoſcèle, comme il arrive, par exemple, dans un quarré lorſqu'on tire la diagonale *A C* (*fig. 96*), alors le quarré de l'hypothénuſe ſera double du quarré d'un de ſes côtés : donc la ſurface d'un quarré eſt à celle du quarré fait ſur ſa diagonale, comme 1 eſt à 2 ; donc (*Arith.* 182) le côté d'un quarré eſt à ſa diagonale, comme 1 eſt à la racine quarrée de 2 ; & comme cette racine ne peut être exprimée exactement en nombres, il s'enſuit qu'on ne peut avoir exactement en nombres le rapport du côté d'un quarré à ſa diagonale, c'eſt-à dire, que la diagonale eſt *incommenſurable*, ou n'a aucune commune meſure avec ſon côté.

169. La propriété des trois côtés d'un triangle rectangle enſeignée (164), n'eſt pas particulière aux quarrés formés ſur ces côtés ; en général, *ſi ſur les trois côtés d'un triangle rectangle quelconque, on forme trois figures ſemblables quelconques, par exemple, trois triangles, trois cercles, &c. la figure formée ſur l'hypothénuſe vaudra la ſomme des figures ſemblables, formées ſur les deux autres côtés.*

Cela ſe démontre abſolument de même que pour les quarrés, en partant de ce principe (161), que les ſurfaces des figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

170. Donc auſſi la ſurface d'une figure quelconque, formée ſur un des côtés de l'angle droit, eſt égale à la différence des deux figures ſemblables, formées ſur l'hypothénuſe & ſur l'autre côté de l'angle droit.

171. Dans la démonſtration du n° 164, on a vu que la ſimilitude des triangles *ABC*, *ADB*, *CDB*, (*fig. 93*) donne $ABC : \overline{AC}^2 :: ABD : \overline{AB}^2 :: BDC : \overline{BC}^2$, ou bien *ABC* : *ADB*

: $BDC :: \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2$; mais les triangles ABC, ADB, BDC, étant tous trois de même hauteur; ſont entr'eux comme leurs baſes, (158); donc $ABC : ADB : BDC :: AC : AD : DC$; donc auſſi $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: AC\ AD : DC$; donc *le quarré fait ſur l'hypothénuſe, eſt à chacun des quarrés faits ſur les deux autres côtés, comme l'hypothénuſe eſt à chacun des ſegmens correſpondans à ces côtés.*

172. Delà on peut conclure le moyen de faire, par lignes, ce que nous avons enſeigné à faire par nombres (163); c'eſt-à-dire, de conſtruire une figure ſemblable à une figure propoſée, & dont la ſurface ſoit à celle de celle-ci, dans un rapport donné.

On tirera (*figure 97*) une ligne indéfinie DE, ſur laquelle on prendra les deux parties DP & PE telles que DP ſoit à PE, comme la ſurface de la figure donnée doit être à celle de la figure cherchée; c'eſt-à-dire, :: 3 : 2, ſi l'on veut que celle-ci ſoit les $\frac{2}{3}$ de l'autre. Sur DE comme diamètre, on décrira le demi-cercle DBE; & ayant élevé au point P la perpendiculaire PB, on mènera du point B, où elle rencontrera la circonférence, aux deux extrémités D & E, les cordes DB, BE. Sur DB on prendra BA égal à un côté AB de la figure donnée, & ayant mené AC parallèle à DE, on aura BC pour le côté homologue de la figure cherchée, qu'on conſtruira enſuite comme il a été dit (128); en voici la raiſon, la ſurface de la figure donnée, doit être à celle de la figure cherchée, comme le quarré du côté AB, eſt au quarré du côté cherché, que j'appelle x; c'eſt-à-dire :: $\overline{AB}^2 : x^2$; or on veut que ces deux ſurfaces ſoient auſſi l'une à l'autre :: 3 : 2; il faut donc que $\overline{AB}^2 : x^2 :: 3 : 2$; or $AB : BC :: BD : BE$, & par conſéquent (*Arith.* 181) $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{BD}^2 : \overline{BE}^2$; mais comme le triangle DBE eſt rectangle, on a (171) $\overline{BD}^2 : \overline{BE}^2 :: DP : PE$; c'eſt-à-dire :: 3 : 2; donc $\overline{AB}^2 :: \overline{BC}^2 :: 3 : 2$; donc auſſi $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: AB^2 : x^2$; donc x doit être égal à BC.

173. Il ſuit encore de ce qu'on vient de dire

(171), que *les quarrés des cordes* AC, AD, *&c. menées par l'extrémité d'un diamètre* AB (fig. 98), *ſont entr'eux comme les parties* AP, AO, *que coupent, ſur ce diamètre, les perpendiculaires abaiſſées des extrémités de ces cordes.*

Car en tirant les cordes BC & BD, on aura (171) dans le triangle rectangle ACB,

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: AB : AP,$$

& dans le triangle rectangle ADB,

$$\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 :: AO : AB$$

donc

$$\overline{AD}^2 : \overline{AC}^2 :: AO : AP.$$

Des Plans.

174. Après avoir établi la meſure & les rapports des ſurfaces planes, il ne nous reſte plus, pour pouvoir paſſer aux ſolides, qu'à conſidérer les propriétés des lignes droites dans leurs différentes poſitions à l'égard des plans, & celles des plans dans leurs différentes poſitions les uns à l'égard des autres; c'eſt ce dont nous allons nous occuper actuellement.

Nous ne ſuppoſons aux plans dont il va être queſtion, aucune grandeur ni aucune figure déterminée; nous les ſuppoſons étendus indéfiniment dans tous les ſens; ce n'eſt que pour aider l'imagination que nous leur donnons les figures par leſquelles nous les repréſentons ici.

175. *Une ligne droite ne peut être en partie dans un plan, & en partie élevée ou abaiſſée à ſon égard.*

Car le plan (5) eſt une ſurface à laquelle une ligne droite s'applique exactement.

176. *Il en eſt de même d'un plan à l'égard d'un autre plan.*

Car une ligne droite qu'on tireroit dans la partie plane commune à ces deux plans, pouvant être prolongée indéfiniment dans l'une & dans l'autre, ſe trouveroit en partie dans l'un de ces plans, & en partie élevée ou abaiſſée à ſon égard, ce qui ne peut être (175).

177. *Deux lignes* AB, CD (fig. 99), *qui ſe coupent, ſont dans un même plan.*

Car il eſt évident qu'on peut faire paſſer un plan par l'une *AB* de ces lignes, & par un point pris arbitrairement dans la ſeconde; & comme le point d'interſection *E*, en tant qu'appartenant à *AB*, eſt dans ce même plan, la ligne *CD* a donc deux points dans ce plan; elle y eſt donc toute entière.

178. *La rencontre ou l'interſection de deux plans ne peut être qu'une ligne droite.*

Il eſt évident qu'elle doit être une ligne, puiſqu'aucun des deux plans n'a d'épaiſſeur; de plus elle doit être une ligne droite, car une ligne droite qu'on tireroit par deux points de cette interſection, eſt néceſſairement toute entière dans chacun des deux plans; elle eſt donc l'interſection même.

On peut donc faire paſſer par une même ligne droite, une infinité de plans différens.

179. Nous diſons qu'*une ligne eſt perpendiculaire à un plan*, quand elle ne penche d'aucun côté de ce plan.

180. *Une perpendiculaire* AB *à un plan* GE (fig. 100) *eſt donc perpendiculaire à toutes les*

lignes BC; BC, BC, &c. *qu'on peut mener par ſon pied, dans ce plan;* car s'il y en avoit une à laquelle elle ne fût pas perpendiculaire, elle incli-neroit vers cette ligne, & par conſéquent vers le plan.

181. *La ligne* AB (fig. 101) *étant perpendiculaire au plan* GE, *ſi par ſon pied* B, *on tire une ligne* BC *dans le plan GE, & qu'on conçoive que le plan* ABC *tourne autour de* AB; *je dis que, dans ce mouvement, la ligne BC ne ſortira point du plan* GE.

Imaginons le plan *ABC* arrivé dans une poſition quelconque *ABD;* ſi la ligne *BC* qui alors eſt en *BD*, n'étoit point dans le plan *GE* le plan *ABD* rencontreroit donc le plan *GE* dans une ligne droite *BF*, à laquelle *AB* ſeroit perpendiculaire (180); *BF* ſeroit donc auſſi perpendiculaire ſur *AB;* & comme *BD* eſt ſuppoſée perpendiculaire ſur *AB*, au même point *B*, il s'enſuivroit donc, qu'au même point *B* & dans un même plan *ABD*, on pourroit élever deux perpendiculaires à *AB*, ce qui (25) eſt impoſſible; donc *BF* ne peut être différente de *BD;* donc *BC* ne peut, dans ſon mouvement autour de *AB*, ſortir du plan *GE*.

182. Donc, *pour qu'une ligne droite* AB (fig. 101) *ſoit perpendiculaire à un plan* GE, *il ſuffit qu'elle ſoit perpendiculaire à deux lignes* BC, BD, *qui ſe rencontrent à ſon pied dans ce plan.*

Car ſi l'on conçoit que le plan de l'angle droit *ABC*, tourne autour de *AB*, la ligne *BC* tracera (181) un plan auquel *AB* ſera perpendiculaire; or je dis que ce plan ne peut être autre que le plan *GE* des deux lignes *BC* & *BD;* car l'angle

ABD étant droit, ainſi que l'angle *ABC*, la ligne *BC*, en tournant autour de *AB*, aura néceſſairement la ligne *BD* pour une de ſes poſitions; donc *BD* eſt dans le plan tracé par *BC*; donc *AB* eſt perpendiculaire au plan *CBD*.

183. *Si d'un point* A *d'une droite* AI *oblique à un plan* GE (fig. 102) *on abaiſſe une perpendiculaire* AB *ſur ce plan, & qu'ayant joint les points* B *&* I *de la perpendiculaire & de l'oblique, par une droite* BI, *on mène à cette dernière, une perpendiculaire* CD *dans le plan* GE; *je dis que* AI *ſera auſſi perpendiculaire à* CD.

Prenons, à commencer du point *I*, les parties égales *IC*, *ID*, & tirons les lignes *BC* & *BD*; ces deux dernières lignes ſeront égales entr'elles (27); donc les deux triangles *ABC*, *ABD* ſeront égaux; car outre l'angle *ABC* égal à l'angle *ABD*, comme étant chacun droit, le côté *AB* eſt commun, & *BC* eſt égal à *BD* ſelon ce qu'on vient de prouver; ils ont donc un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; ils ſont donc égaux; donc *AD* eſt égal à *AC*; la ligne *AI* a donc deux points *A* & *I* également éloignés du point *C* & du point *D*; elle eſt donc perpendiculaire ſur *CD* (30).

184. *Un plan* eſt dit *perpendiculaire à un autre plan*, quand il ne penche ni d'un côté, ni de l'autre, de ce dernier.

185. Donc, *par une même ligne* CD (fig. 103) *priſe dans un plan* GE, *on ne peut conduire plus d'un plan perpendiculaire à ce plan* GE.

186. *Un plan* CK *eſt perpendiculaire à un autre plan* GE, *quand il paſſe par une droite* AB *perpen-*

diculaire à celui-ci ; car il eſt évident qu'il ne peut incliner d'aucun côté du plan *GE.*

187. *Si par un point* A *pris dans le plan* CK *perpendiculaire au plan* GE *on mène une perpendiculaire* AB *à la commune ſection* CD, *cette ligne ſera auſſi perpendiculaire au plan* GE.

Car ſi elle ne l'étoit pas, on pourroit par le point *B* où elle tombe, élever une perpendiculaire au plan *GE*, & conduire par cette perpendiculaire & par la commune ſection *CD*, un plan qui (186) ſeroit perpendiculaire au plan *GE ;* on pourroit donc, par une même ligne *CD*, priſe dans le plan *GE*, mener deux plans perpendiculaires à celui-ci ; ce qui eſt impoſſible (185) ; donc *AB* eſt perpendiculaire au plan *GE.*

188. Donc *le plan* CK *étant perpendiculaire au plan* GE, *la perpendiculaire* BA *qu'on élevera ſur le plan* GE, *par un point* B *de ſa ſection commune, ſera néceſſairement dans le plan* CK.

De cette propoſition, il ſuit que *deux perpendiculaires* BA, LM, *à un même plan* GE, *ſont parallèles.*

Car ſi l'on joint leurs pieds *B* & *L* par une ligne *BL*, & que par cette ligne & par *AB* on conduiſe un plan *CK*, ce plan ſera perpendiculaire au plan *GE* (186) ; & puiſque *LM* eſt alors une perpendiculaire au plan *GE*, menée par un point *L* du plan *CK*, elle ſera donc dans le plan *CK* (188) ; or puiſque les deux lignes *AB*, *LM* ſont toutes deux dans un même plan & perpendiculaires à la même ligne *BL*, elles ſont parallèles (36 & 37).

189. Donc *ſi deux droites* AB, CD (fig. 105)

ſont parallèles chacune à une troiſième HF, *elles ſeront auſſi parallèles entr'elles ;* car les lignes *AB*, *HF* étant parallèles, peuvent être toutes deux perpendiculaires à un même plan *GE ;* par la même raiſon, *CD* & *HF* peuvent être perpendiculaires au même plan *GE ;* donc *AB* & *CD* étant perpendiculaires à un même plan, ſeront parallèles.

190. *Si deux plans* CK, NL (fig. 104) *ſont perpendiculaires à un troiſième* GE, *leur commune ſection* AB *ſera auſſi perpendiculaire au plan* GE.

Car la perpendiculaire qu'on éleveroit par le point *B* ſur le plan *GE*, doit être dans chacun de ces deux plans (188) ; elle ne peut donc être autre que l'interſection commune.

191. On appelle *angle-plan*, l'ouverture de deux plans *GF*, *GE* (fig. 106) qui ſe rencontrent ; cet angle s'appelle auſſi l'*inclinaiſon* de l'un de ces plans à l'égard de l'autre.

L'angle-plan formé par les deux plans *GF*, *GE*, n'eſt autre choſe que la quantité dont le plan *GF* auroit dû tourner autour de *AG* pour venir dans ſa ſituation actuelle, s'il avoit été d'abord couché ſur le plan *GE*.

De-là il eſt aiſé de voir que ſi par un point *B* pris dans la commune ſection *AG*, on mène dans le plan *GE* la perpendiculaire *BD* à *AG*, & dans le plan *GF* la perpendiculaire *BC* à la même ligne *AG*, l'angle formé par les deux plans, eſt la même choſe que l'angle formé par les deux lignes *BD* & *BC ;* car il eſt facile de voir que pendant le mouvement du plan *GF*, la ligne *BC* s'écarte de la ligne *BD* ſur laquelle elle étoit couchée au commencement

commencement du mouvement, s'écarte, dis-je, de *B D*, préciſément ſelon la même loi ſelon laquelle le plan *G F* s'écarte du plan *G E*.

192. Donc *un angle-plan a même meſure que l'angle rectiligne compris entre deux lignes tirées, dans chacun des deux plans qui le forment, perpendiculairement à la commune ſection, & à un même point de cette ligne.*

De-là il eſt ſi aiſé de conclure les propoſitions ſuivantes, que nous nous contenterons de les énoncer.

193. *Un plan qui tombe ſur un autre plan, forme deux angles, qui, pris enſemble, valent* 180 *degrés.*

194. *Les angles formés par tant de plans qu'on voudra, qui paſſent tous par une même droite, valent* 360 *degrés.*

195. *Deux plans qui ſe coupent, font les angles oppoſés au ſommet, égaux.*

196. On appelle *plans parallèles*, ceux qui ne peuvent jamais ſe rencontrer, à quelque diſtance qu'on les imagine prolongés.

Les plans parallèles ſont donc par-tout également éloignés.

197. *Si deux plans parrallèles ſont coupés par un troiſième plan* (fig. 107), *les interſections* A B, C D *ſeront deux droites parallèles ;* car comme elles ſont dans un même plan *ABCD*, elles ne pourroient manquer de ſe rencontrer ſi elles n'étoient pas parallèles, & alors il eſt évident que les plans ſe rencontreroient auſſi.

198. *Deux plans parallèles, coupés par un troisième, ont les mêmes propriétés, dans les angles qu'ils forment avec ce troisième, que deux lignes droites parallèles, à l'égard d'une troisième droite qui les coupe.* C'eſt une ſuite de ce qui a été dit (192).

Propriétés des lignes droites coupées par des Plans parallèles.

199. *Si d'un point* I *pris hors d'un plan* GE (fig. 108), *on tire à différents points* K, L, M *de ce plan, des droites* IK, IL, IM, *& qu'on coupe ces droites par un plan* g e *parallèle au plan* G E; *je dis, 1°. que ces droites ſeront coupées proportionnellement; 2°. que la figure* k l m *ſera ſemblable à la figure* K L M.

Ne ſuppoſons d'abord que trois points *K, L, M*, puiſque les droites *kl, lm, mk* ſont les interſections des plans *IKL, ILM, IKM*, avec le plan *ge*, elles ſont parallèles aux droites *KL, LM, MK*, interſections des mêmes plans avec le plan *GE* (197 : donc les triangles *IKL, ILM, IMK*, ſont ſemblables aux triangles *Ikl, Ilm, Imk*, chacun à chacun; donc *IK : ik : : KL : : kl : : IL : Il : : LM : lm : : IM : Im : : MK : mk*; or, 1°. ſi de cette ſuite de rapports égaux on tire ſeulement ceux qui renferment les droites qui partent du point *I*, on aura *IK : Ik : : IL, Il : : IM : Im*; donc les droites *IK, IL, IM* ſont coupées proportionnellement.

2°. Si de la même première ſuite de rapports égaux, on tire ceux qui renferment les lignes comprises dans les deux plans parallèles, on aura *KL : kl : : LM : lm : : KM : km*; donc les deux triangles

K L M, *k l m* ſont ſemblables, puiſqu'ils ont les côtés proportionnels.

Suppoſons maintenant, tel nombre de points *A*, *B*, *C*, *D*, *F*, &c. qu'on voudra; on démontrera préciſément de la même manière, que les droites *I A*, *I B*, *I C*, &c. ſont coupées proportionnellement; & ſi l'on imagine des diagonales *A C*, *A D*, &c. *a c*, *a d*, &c. menées des deux angles correſpondans *A* & *a*, on démontrera, auſſi de la même maniere, que les triangles *A B C*, *A C D*, &c. ſont ſemblables aux triangles *a b c*, *a c d*, &c. chacun à chacun; donc les deux polygones *A B C D F*, *a b c d f* étant compoſés d'un même nombre de triangles ſemblables chacun à chacun, & ſemblablement diſpoſés, ſont ſemblables (128).

200. Puiſque les deux figures *K L M*, *k l m* ſont ſemblables, concluons-en que l'angle *K L M* eſt égal à l'angle *k l m*, & par conſéquent, *ſi deux droites* K L, L M *qui comprennent un angle* K L M, *ſont paralleles à deux droites* k l, l m *qui comprennent un angle k l m*, *l'angle* K L M *ſera égal à l'angle* k l m, *lors même que ces deux angles ne ſeront pas dans un même plan*: nous avons donné cette même propoſition (43); mais nous ſuppoſions que les deux angles étoient dans un même plan.

201. Il ſuit encore, de ce que les deux figures *A B C D F* & *a b c d f* ſont ſemblables, & de ce que les deux figures *K L M*, *k l m* ſont ſemblables; il ſuit, dis-je, que *les ſurfaces des deux ſections* a b c d f, k l m *ſont entr'elles comme celles des deux figures* A B C D F, K L M.

Car $A B C D F : a b c d f :: \overline{A B}^2 : \overline{a b}^2$ (161).

Mais les triangles ſemblables *I A B*, *I a b* donnent $A B : a b :: I A : I a$.

Et par conſéquent (*Arithm.* 181) $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{IA}^2 : \overline{Ia}^2$ ou (199) $:: \overline{IM}^2 : \overline{Im}^2$:, ou (à cauſe des triangles ſemblables ILM, Ilm) $:: \overline{LM}^2 : \overline{lm}^2$; & par conſéquent (161) : : $KLM : klm$; donc $ABCDF : abcdf :: KLM : klm$, ou (*Arith.* 171) $ABCDF : KLM :: abcdf : klm$.

202. Cette démonſtration fait voir en même temps que les ſurfaces $ADCDF$, $abcdf$ ſont entr'elles comme le quarrés des deux droites IA & Ia tirées du point I à deux points correſpondans de ces deux figures, & par conſéquent (199) comme les quarrés des hauteurs ou perpendiculaires IP, Ip menées du point I ſur les plans GE & ge.

Concluons donc 1°. que ſi les deux ſurfaces $ABCDF$, KLM étoient égales, les deux ſurfaces $abcdf$, klm ſeroient auſſi égales.

2°. Que tout ce que nous venons de dire, auroit encore lieu ſi le point I, au lieu d'être commun aux droites IA, IB, IC, &c. & aux droites IM, IL, &c. étoit différent pour chaque figure, pourvu qu'il fût à même hauteur au-deſſus du plan ge.

TROISIÈME SECTION.

Des Solides.

203. NOUS avons nommé *Solides* ou *Volumes* ou *Corps* (1), tout ce qui a les trois dimenſions, *Longueur*, *Largeur* & *Profondeur*.

Nous allons nous occuper de la meſure & des rapports des ſolides.

Nous conſidérerons les ſolides terminés par des ſurfaces planes; & de ceux qui ſont renfermés par des ſurfaces courbes, nous ne conſidérerons que le *cylindre*, le *cône* & la *ſphère*.

Les ſolides terminés par des ſurfaces planes, ſe diſtinguent en général par le nombre & la figure des plans qui les renferment, ces plans doivent être, au moins, au nombre de quatre.

204. Un ſolide, dont deux faces oppoſées ſont deux plans égaux & parallèles, & dont toutes les autres faces ſont des parallélogrammes, s'appelle en général un *Priſme*. *Voyez fig.* 109, 110, 111, 112.

On peut donc regarder le priſme comme engendré par le mouvement d'un plan *B D F*, qui gliſſeroit parallèlement à lui-même le long d'une ligne droite *A B*, (*fig.* 109).

Les deux plans parallèles ſe nomment les *baſes* du priſme & la perpendiculaire *L M* menée d'un point de l'une de ces baſes, ſur l'autre baſe, ſe nomme la *hauteur*.

De l'idée que nous venons de donner du priſme il ſuit, qu'à quelqu'endroit qu'on coupe un priſme,

par un plan parallèle à sa base, la section sera toujours un plan parfaitement égal à la base.

Les lignes telles que $B A$, qui sont les rencontres de deux parallélogrammes consécutifs, sont nommées les *arêtes* du prisme.

Le prisme est *droit*, lorsque ses arêtes sont perpendiculaires à la base; alors elles sont toutes égales à la hauteur; *voyez fig.* 110 & 112.

Au contraire le prisme est *oblique* lorsque ses arêtes inclinent sur la base.

Les prismes se distinguent par le nombre des côtés de leur base, si la base est un triangle, le prisme est dit *prisme triangulaire*, *fig.* 109; si la base est un quadrilatère, on l'appelle *prisme quadrangulaire* (*fig.* 110); & ainsi de suite.

Parmi les prismes quadrangulaires on distingue plus particuliérement le *parallélipipède* & le *cube*.

Le *parallélipipède* est un prisme quadrangulaire, dont les bases, & par conséquent toutes les faces, sont des parallélogrammes; & lorsque le parallélogramme qui sert de base est un rectangle, & qu'en même temps le prisme est droit; on l'appelle *parallélipipède rectangle*, voyez *fig.* 110.

Le parallélipipède rectangle prend le nom de *cube*, lorsque la base est un quarré, & que l'arête AB, (*fig.* 112) est égale au côté de ce quarré.

Le cube est donc un solide compris sous six quarrés égaux; c'est avec ce solide qu'on mesure tous les autres, comme nous le verrons dans peu.

205. Le *cylindre* est le solide compris entre deux cercles égaux & parallèles, & la surface que traceroit une ligne $A B$ *fig* 113 & 114), qui glisseroit parallèlement à elle-même le long des deux circonférences. Le cylindre est *droit* quand la ligne $C F$, *fig.* 113, qui joint les centres des deux

baſes oppoſées, eſt perpendiculaire à ces cercles; cette ligne CF s'appelle l'*axe* du cylindre; & le cylindre eſt *oblique*, quand cette même ligne CF incline ſur la baſe.

On peut conſidérer le cylindre droit comme engendré par le mouvement du parallélogramme rectangle $FCDE$ tournant autour de ſon côté CF.

206. La *pyramide* eſt un ſolide compris ſous pluſieurs plans, dont l'un, qu'on appelle la *baſe*, eſt un polygone quelconque, & les autres, qui ſont tous des triangles, ont pour baſe les côtés de ce polygone, & ont tous leurs ſommets réunis en un même point qu'on appelle le *ſommet* de la pyramide. *Voyez fig.* 115, 116, 117.

La perpendiculaire AM, menée du ſommet ſur le plan qui ſert de baſe, s'appelle la *hauteur* de la pyramide.

Les pyramides ſe diſtinguent par le nombre des côtés de leurs baſes, en ſorte que celle qui a pour baſe un triangle, eſt appellée *pyramide triangulaire*; celle qui a pour baſe un quadrilatère, *pyramide quadrangulaire*; & ainſi de ſuite.

La pyramide eſt dite *réguliere*, lorſque le polygone qui lui ſert de baſe eſt régulier, & qu'en même-tems la perpendiculaire AM (*figure* 117) menée du ſommet, paſſe par le centre de ce polygone.

La perpendiculaire AG, menée du ſommet A ſur l'un DE, des côtés de la baſe, s'appelle *apothême*.

Il eſt clair que tous les triangles qui aboutiſſent au point A, ſont égaux & iſoceles; car ils ont tous des baſes égales, & les arêtes AB, AC, AD, &c. ſont toutes égales, puiſque ce ſont toutes des obliques également éloignées de la perpendiculaire AM (27).

Il n'eſt pas moins évident que tous les apothêmes ſont égaux.

207. Le *cône*, (*fig.* 118 & 119) eſt le ſolide renfermé par le plan circulaire *B G D H* qu'on appelle la *baſe* du cône, & par la ſurface que traceroit une ligne *A B* tournant autour du point fixe *A*, & raſant toujours la circonférence *B G D H*.

Le point *A* s'appelle le *ſommet* du cône.

La perpendiculaire menée du ſommet ſur le plan de la baſe, ſe nomme la *hauteur* du cône; & le cône eſt *droit* ou *oblique*, ſelon que cette perpendiculaire paſſe (*fig.* 118), ou ne paſſe point *fig.* 119) par le centre de la baſe.

On peut concevoir le cône droit comme engendré par le mouvement du triangle rectangle *A C D*, (*fig.* 118) tournant autour du côté *A C*.

208. La *ſphere* eſt un ſolide terminé, de toutes parts, par une ſurface dont tous les points ſont également éloignés d'un même point.

On peut conſidérer la ſphère comme le ſolide qu'engendreroit le demi-cercle *A B C*, (*fig.* 121) tournant autour du diamétre *A D*.

Il eſt évident que toute *coupe*, ou toute *ſection* de la ſphère, par un plan, eſt un cercle. Si le plan paſſe par le centre, la ſection s'appelle *grand cercle* de la ſphere. Et on appelle, au contraire, *petit cercle*, toute ſection de la ſphere par un plan qui ne paſſe point par le centre.

Le *ſecteur ſphérique* eſt le ſolide qu'engendreroit le ſecteur circulaire *B C A* tournant autour du rayon *A C*. La ſurface que décriroit l'arc *A B* dans ce mouvement, s'appelle *calotte ſphérique*.

Le *ſegment ſphérique* eſt le ſolide qu'engendreroit

le demi-ſegment circulaire *AFB*, tournant autour de la partie *AF* du rayon.

Des ſolides ſemblables.

209. Les *ſolides ſemblables* ſont ceux qui ſont compoſés d'un même nombre de faces ſemblables chacune à chacune, & ſemblablement diſpoſées dans les deux ſolides, *voyez fig.* 125.

210. *Les arêtes homologues & les ſommets des angles ſolides homologues, ſont donc des lignes & des points ſemblablement placés dans les deux ſolides;* car les arêtes homologues, & les ſommets des angles ſolides homologues, ſont des lignes & des points ſemblablement placés à l'égard des faces auxquelles ils appartiennent, puiſque ces faces ſont ſuppoſées ſemblables; or ces faces ſont ſemblablement diſpoſées dans les deux ſolides; donc, &c.

211. Donc *les triangles* A C D, a c d, (fig. 125), *qui joignent uu angle ſolide, & les extrémités d'une arête homologue, dans chaque ſolide, ſont des figures ſemblables, & ſemblablement diſpoſées dans les deux ſolides;* car les extrémités des arêtes homologues *CD* & *cd* ſont elles-mêmes les ſommets d'angles ſolides homologues, qui ſont (210) ſemblablement placés à l'égard des ſolides.

212. *Les diagonales* A C, a c, A D, a d, &c. *qui joignent deux angles ſolides homologues, ſont donc entr'elles comme les arêtes homologues* C D, c d, *de ces ſolides;* car elles ſont les côtés des triangles ſemblables dont on vient de parler, & qui ont pour un de leurs côtés des arêtes homologues.

213. Donc deux ſolides ſemblables peuvent être partagés en un même nombre de pyramides ſemblables chacune à chacune, par des plans conduits par deux angles homologues, & par deux arêtes homologues; car les faces de ces pyramides ſeront compoſées de triangles ſemblables, & ſemblablement diſpoſés dans les deux ſolides (211); & les baſes de ces mêmes pyramides ſeront auſſi ſemblables, puiſqu'elles ſont des faces homologues des deux ſolides; donc (209) ces pyramides ſeront ſemblables.

214. *Si de deux angles homologues on abaiſſe des perpendiculaires ſur deux faces homologues, ces perpendiculaires ſeront entr'elles dans le rapport de deux arêtes homologues quelconques.*

Car les deux angles homologues étant ſemblablement diſpoſés à l'egard de deux faces homologues (210), doivent néceſſairement être à des diſtances de ces faces, qui ſoient entr'elles dans le rapport des dimenſions homologues des deux ſolides.

De la meſure des Surfaces des Solides.

215. Les ſurfaces des priſmes & des pyramides, étant compoſées de parallélogrammes, de triangles & de polygones rectilignes, nous pourrions nous diſpenſer de rien dire ici ſur la manière dont on doit s'y prendre pour les meſurer, puiſque nous avons donné (139, 141 & 143) les moyens de meſurer les parties dont elles ſont compoſées. Mais on peut tirer de ce que nous avons dit à ce ſujet, quelques conſéquences, qui non-ſeulement ſerviront à ſimplifier les opérations qu'exigent ces meſures, mais nous ſeront encore utiles pour évaluer

les ſurfaces des cylindres, des cônes, & même de la ſphère.

216. *La ſurface d'un priſme quelconque (en n'y comprenant point les deux baſes) eſt égale au produit de l'une des arêtes de ce priſme, par le contour d'une ſection* b d f h k, *fig.* 112 *) faite par un plan auquel cette arête ſeroit perpendiculaire.*

Car puiſque l'arête *AB* eſt ſuppoſée perpendiculaire au plan *b d f h k*, les autres arêtes qui ſont toutes parallèles à celles-là, ſeront auſſi perpendiculaires au plan *b d f h k*; donc réciproquement les droites *b d*, *d f*, *f h*, *h k*, &c. ſeront perpendiculaires chacune ſur l'arête qu'elle coupe; en conſidérant donc les arêtes comme les baſes des parallélogrammes qui enveloppent le priſme, les lignes *b d*, *d f*, *f h* en ſeront les hauteurs. Il faudra donc, pour avoir la ſurface du priſme, multiplier l'arête *AB*, par la perpendiculaire *b d*; l'arête *CD*, par la perpendiculaire *d f*, & ainſi de ſuite; & ajouter tous ces produits; mais comme toutes les arêtes ſont égales, il eſt évident qu'il revient au même d'en multiplier une ſeule *AB*, par la ſomme de toutes les hauteurs, c'eſt-à-dire, par le contour *b d f h k*.

217. Quand le priſme eſt droit, la ſection *b d f h k* ne diffère pas de la baſe *B D F H K*; & l'arête *AB* eſt alors la hauteur du priſme; donc *la ſurface d'un priſme droit (en n'y comprenant point les deux baſes), eſt égale au produit du contour de la baſe, multiplié par la hauteur.*

218. Nous avons vu ci-deſſus (130) qu'on pouvoit conſidérer le cercle, comme un polygone régulier d'une infinité de côtés; donc le cylindre peut être conſidéré comme un priſme, dont le nom-

bre des parallélogrammes qui compoſent la ſurface, ſeroit infini ; donc,

La ſurface d'un cylindre droit eſt égale au produit de la hauteur de ce cylindre, par la circonférence de ſa baſe. Nous avons vu (146), comment on doit s'y prendre pour avoir cette circonférence.

On peut dire auſſi que la ſurface *d'un cylindre droit eſt double de celle d'un cercle dont le rayon ſeroit moyen proportionnel entre la hauteur de ce cylindre & le rayon de ſa baſe.*

Car ſi l'on repréſente par H la hauteur, par r le rayon de la baſe, & par R le rayon moyen proportionnel ; & qu'en même temps on repréſente par cir. r, & cir. R, les circonférences qui ont pour rayon r & R, on aura, par la ſuppoſition, $r : R :: R : H$; & puiſque les circonferences ſont proportionnelles (131) aux rayons ; on a cir. r : cir. $R :: R : H$. Or le produit des extrêmes de cette proportion eſt la ſurface du cylindre, & le produit des moyens eſt le double de la ſurface du cercle qui a pour rayon R ; donc (*Arith.* 168) &c.

Dorénavant pour marquer la ſurface d'un cercle qui a pour rayon une ligne quelconque R, nous emploierons auſſi cette expreſſion abrégée cer. R.

A l'égard du cylindre oblique, il faut multiplier ſa longueur AB, par la circonférence de la ſection $bgdh$ (*fig* 114), cette ſection étant faite comme il a été dit (216). La méthode pour déterminer la longueur de cette ſection, dépend de connoiſſances plus étendues que celles que nous avons données juſqu'ici ; dans la pratique, il faut ſe contenter de la meſurer méchaniquement, en enveloppant le cylindre avec un fil (ou autre choſe équivalente), qu'on aura ſoin d'aſſujettir dans un plan auquel la longueur AB de ce cylindre, ſoit perpendiculaire.

219. *Pour la pyramide*, ſi elle n'eſt pas régulière, il faudra chercher ſéparément la ſurface de chacun des triangles qui la compoſent, & ajouter ces ſurfaces.

Mais ſi elle eſt régulière, on peut avoir ſa ſurface plus brièvement, en multipliant le contour de ſa baſe, par la moitié de l'apothême *A G* (*fig.* 117); car tous les triangles étant de même hauteur, il ſuffit de multiplier la moitié de la hauteur commune, par la ſomme de toutes les baſes.

220. En conſidérant encore la circonférence d'un cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, on voit que le cône n'eſt, au fond, qu'une pyramide régulière, dont la ſurface (non compris celle de la baſe) eſt compoſée d'une infinité de triangles, & que, par conſéquent, *la ſurface convexe d'un cône droit, eſt égale au produit de la circonférence de la baſe, par la moitié du côté* A B *de ce cône* (fig. 118).

A l'égard de la ſurface du cône oblique, elle dépend d'une Géométrie plus compoſée; ainſi nous n'en parleront point ici. Au reſte, la manière dont nous venons de conſidérer le cône, donne le moyen de le meſurer à peu près, lorſqu'il eſt oblique. Il faut partager la circonférence de la baſe en un aſſez grand nombre d'arcs, pour que chacun puiſſe être conſidéré, ſans erreur ſenſible, comme une ligne droite; & alors on calculera la ſurface, comme pour une pyramide qui auroit autant de triangles qu'on a d'arcs.

221. *Pour avoir la ſurface d'un tronc de cône droit, dont les baſes oppoſées* B G D H, b g d h (fig. 120) *ſont parallèles; il faut multiplier le côté* B b *de ce tronc, par la moitié de la ſomme des circonférences des deux baſes oppoſées.*

En effet, on peut concevoir cette surface, comme l'assemblage d'une infinité de trapèzes tels que EF, ef dont les côtés Ee, Ff tendent au sommet A; or la surface de chacun de ces trapèzes, est égale à la moitié de la somme des deux bases opposées EF, ef, multipliée par la distance de ces deux bases (142); mais cette distance ne diffère pas des côtés Ee, Ef ou Bb; donc pour avoir la somme de tous ces trapèzes, il faut multiplier la moitié de la somme de toutes les bases opposées, telles que EF, ef, c'est à dire, la moitié de la somme des deux circonférences, par la ligne Bb hauteur commune de tous ces trapèzes.

222. Si par le milieu M du côté Bb, on conduit un plan parallèle à la base, la section (199) sera un cercle dont la circonférence sera la moitié de la somme des circonférences des deux bases opposées, puisque son diamètre MN (142) est la moitié de la somme de ceux des bases, & que (131) les circonférences sont entr'elles comme leurs diamètres. Donc *la surface d'un cône tronqué, à bases parallèles, est égale au produit du côté du tronc, par la circonférence de la section faite à distances égales des deux bases opposées.* Cette proposition va nous servir pour la démonstration de la suivante.

223. *La surface d'une sphere est égale au produit de la circonférence d'une de ses grands cercles, multipliée par le diamètre.*

Concevez la demi-circonférence AKD (*fig.* 120) divisée en une infinité d'arcs; chacun de ces arcs, tel que KL, étant infiniment petit, se confondra avec la corde.

Menons par les extrémités de KL, les perpendiculaires KE, LF au diametre AD; & par le milieu I

de KL ou de ſa corde, menons IH parallele à KE, & le rayon IC; ce rayon ſera perpendiculaire ſur KL (52); tirons enfin KM perpendiculaire ſur IH ou ſur LF. Si l'on conçoit que la demi-circonférence AKD tourne autour de AD, elle engendrera la ſurface de la ſphere, & chacun de ſes arcs KL engendrera la ſurface d'un cône tronqué, qui ſera un élément de celle de la ſphere. Nous allons voir que la ſurface de ce cône tronqué eſt égale au produit de KM ou EF multiplié par la circonférence qui a pour rayon IC ou AC.

Le triangle KML eſt ſemblable au triangle IHC, puiſque ces deux triangles ont les côtés perpendiculaires l'un à l'autre, d'après ce qu'on vient de preſcrire. Ces triangles ſemblables donneront donc (111) cette proportion $KL : KM :: IC : IH$; ou, (puiſque (131) les circonférences ſont entr'elles comme leurs rayons) $KL : KM :: \text{cir. } IC : \text{cir. } IH$; donc puiſque (*Arith.* 168) dans toute proportion, le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens, $KL \times \text{cir. } IH$ eſt égal à $KM \times \text{cir. } IC$, ou (ce qui revient au même) eſt égal à $EF \times \text{cir. } AC$. Or (222) le premier de ces produits exprime la ſurface du cône tronqué engendré par KL; donc ce cône tronqué eſt égal à $EF \times \text{cir. } AC$, c'eſt-à-dire, au produit de ſa hauteur EF par la circonférence d'un grand cercle de la ſphere. Et comme en prenant tout autre arc que KL, on démontreroit la même choſe & de la même maniere, on doit conclure que la ſomme des petits cônes tronqués qui compoſent la ſurface de la ſphere, eſt égale à la circonférence d'un des grands cercles, multipliée par la ſomme des hauteurs de ces cônes tronqués, laquelle ſomme compoſe évidemment le diamètre. Donc la ſurface de la ſphere eſt égale à la circonférence d'un de ſes grands cercles, multipliée par le diamètre.

224. Si l'on conçoit un cylindre (*fig.* 123) qui entoure la ſphère en la touchant, & qui ait pour hauteur le diamètre de cette ſphere; c'eſt-à-dire, ſi l'on conçoit un cylindre circonſcrit à la ſphere, on pourra conclure que la *ſurface de la ſphere eſt égale à la ſurface convexe du cylindre circonſcrit*; car (218) la ſurface de ce cylindre eſt égale au produit de la circonférence de la baſe, multipliée par la hauteur; or la circonférence de la baſe eſt celle d'un grand cercle de la ſphere, & la hauteur eſt égale au diametre; donc, &c.

225. Puiſque (145) pour avoir la ſurface d'un cercle, il faut multiplier la circonférence par la moitié du rayon ou le quart du diametre, & que pour avoir celle de la ſphere, il faut multiplier la circonférence par le diametre, on doit donc dire que *la ſurface de la ſphere eſt quadruple de celle d'un de ſes grands cercles.*

226. La démonſtration que nous venons de donner de la meſure de la ſurface de la ſphere, prouve également que pour avoir la ſurface convexe du ſegment ſphérique qu'engendreroit l'arc AL (*fig.* 124) tournant autour du diametre AD, il faut multiplier la circonférence d'un grand cercle de la ſphere, par la hauteur AI de ce ſegment; & que pour avoir celle d'une portion de ſphere compriſe entre deux plans paralleles tels que LKM, NRP, il faut pareillement multiplier la circonférence d'un grand cercle de la ſphere, par la hauteur IO de cette portion de ſphere. Car on peut conſidérer ces ſurfaces, ainſi qu'on l'a fait pour la ſphere entiere, comme compoſées d'une infinité de cônes tronqués, dont chacun eſt égal au produit de ſa hauteur par la circonférence d'un grand cercle de la ſphere.

Des

Des rapports des Surfaces des Solides.

227. Si deux ſolides dont on a deſſein de comparer les ſurfaces, ſont terminés par des plans diſſemblables & irréguliers, le ſeul parti qu'il y ait à prendre, pour trouver le rapport de leurs ſurfaces, eſt de calculer ſéparément la ſurface de chacun en meſures de même eſpèce, & de comparer le nombre des meſures de l'une, au nombre des meſures de l'autre; c'eſt-à-dire, par exemple, le nombre des pieds quarrés de l'une, au nombre des pieds quarrés de l'autre.

228. *Les ſurfaces des priſmes (en n'y comprenant point les baſes oppoſées) ſont entr'elles comme les produits de la longueur de ces priſmes, par le contour de la ſection faite perpendiculairement à cette longueur.*

Car ces ſurfaces ſont égales à ces produits (216).

Donc *ſi ces longueurs ſont égales, les ſurfaces des priſmes ſeront entr'elles comme le contour de la ſection faite perpendiculairement à la longueur de chacun.* Car le rapport des produits de la longueur, par le contour de cette ſection, ne changera point ſi l'on omet, dans chacun de ces produits, la longueur qui en eſt facteur commun.

229. Donc *les ſurfaces des priſmes droits ou des cylindres droits de même hauteur, ſont entr'elles comme les contours des baſes, quelque figure qu'aient d'ailleurs ces baſes.*

Et ſi, au contraire, *les contours des baſes ſont les mêmes, & les hauteurs différentes, ces ſurfaces ſeront comme les hauteurs.*

230. *Les ſurfaces des cônes droits, ſont entr'elles*

comme les produits des côtés de ces cônes, par les circonférences des baſes, ou par les rayons, ou par les diamètres de ces baſes.

Car ces ſurfaces étant égales chacune au produit de la circonférence de la baſe, par la moitié du côté du cône (220), doivent être entr'elles comme ces produits, & par conſéquent comme le double de ces produits. D'ailleurs, comme les circonférences ont entr'elles le même rapport que leurs rayons ou leurs diamètres, on peut (99) ſubſtituer dans ces produits, le rapport des rayons, ou celui des diamètres, à celui des circonférences.

231. *Les ſurfaces des ſolides ſemblables, ſont entr'elles comme les quarrés de leurs lignes homologues.*

Car elles ſont compoſées de plans ſemblables dont les ſurfaces ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés ou de leurs lignes homologues, leſquelles lignes ſont lignes homologues des ſolides, & proportionnelles à toutes les autres lignes homologues.

232. *Les ſurfaces de deux ſphères, ſont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres;* car la ſurface d'une ſphère étant quadruple de celle de ſon grand cercle, les ſurfaces de deux ſphères doivent être entr'elles comme le quadruple de leurs grands cercles; ou ſimplement comme leurs grands cercles; c'eſt-à-dire, (162) comme les quarrés des rayons ou des diamètres.

De la ſolidité des Priſmes.

233. Pour fixer les idées ſur ce qu'on doit entendre par la *ſolidité* d'un corps, il faut ſe repréſenter, par la penſée, une portion d'étendue de

telle forme qu'on voudra, de la forme d'un cube, par exemple, mais qui ait infiniment peu de longueur, de largeur & de profondeur, & concevoir que la capacité d'un corps eſt entièrement remplie de pareils cubes que nous nommerons *points ſolides*. La totalité de ces points forme ce que nous entendons par *ſolidité* d'un corps.

234. *Deux priſmes ou deux cylindres, ou un priſme & un cylindre de même baſe & de même hauteur, ou de baſes égales & de hauteurs égales, ſont égaux en ſolidité, quelque différentes que ſoient d'ailleurs les figures des baſes.*

Car ſi l'on imagine ces corps, coupés par des plans parallèles à leurs baſes, en tranches infiniment minces, & d'une épaiſſeur égale à celle des points ſolides dont on peut imaginer que ces corps ſont remplis, il eſt viſible que, dans chacun, chaque ſection étant égale à la baſe (204), le nombre des points ſolides, dont chaque tranche ſera compoſée, ſera par-tout le même, & égal au nombre des points ſuperficiels de la baſe: & comme on ſuppoſe même hauteur aux deux ſolides, ils auront chacun le même nombre de tranches; ils contiendront donc en totalité, le même nombre de points ſolides; donc ils ſont égaux en ſolidité.

De la meſure de la ſolidité des Priſmes & des Cylindres.

235. La conſidération des points ſolides dont nous venons de faire uſage, eſt principalement utile lorſque, pour démontrer l'égalité de deux ſolides, on eſt obligé de conſidérer ces ſolides dans leurs élémens mêmes, en les décompoſant en tranches infiniment minces; nous aurons encore occaſion

de les considérer de cette manière. Mais lorsqu'on veut mesurer les capacités ou solidités des corps, pour les usages ordinaires, ce n'est point en cherchant à évaluer le nombre de leurs points solides qu'on y parvient; car on conçoit très-bien que dans tel corps que ce soit, il y a une infinité de ces sortes de points.

Que fait-on donc, à proprement parler, quand on mesure la solidité des corps? on cherche à déterminer combien de fois, le corps dont il s'agit, contient un autre corps connu. Par exemple, quand on veut mesurer le parallélipipède rectangle *ABCDEFGH* (*fig.* 126) on a pour objet de connoître combien ce parallélipipède contient de cubes tels que le cube connu *x*; c'est ordinairement en mesures cubiques, qu'on évalue les solidités des corps.

Pour connoître la solidité du parallélipipède rectangle *ABCDEFGH*, il faut chercher combien sa base *EFGH* contient de parties quarrées telles que *efgh*; chercher pareillement combien la hauteur *AH* contient de fois la hauteur *ah*; & multipliant le nombre des parties quarrées de *FFGH* par le nombre des parties de *AH*, le produit exprimera combien le parallélipipède proposé, contient de cubes tels que *x*; c'est-à-dire, combien il contient de pieds-cubes, ou de pouces-cubes, &c. si le côté *ah* du cube *x* est d'un pied ou d'un pouce.

En effet, on voit qu'on peut placer sur la surface *EFGH* autant de cubes tels que *x*, qu'il y a de quarrés tels que *efgh* dans la base *EFGH*. Tous ces cubes formeront un parallélipipède dont la hauteur *HL* sera égale à *ah*; or il est évident qu'on pourra placer dans le solide *ABCDEFGH* autant de parallélipipèdes tels que celui-là, que la

hauteur *HL* ſera contenue de fois dans *AH*; donc il faut répéter ce parallélipipède ou le nombre des cubes répandus ſur *EFGH*, autant de fois qu'il y a de parties dans *AH*; ou puiſque le nombre de ces cubes eſt le même que le nombre des quarrés contenus dans la baſe, il faut multiplier le nombre des quarrés contenus dans la baſe, par le nombre des parties de la hauteur, & le produit exprimera le nombre de cubes contenus dans le parallélipipède propoſé.

236. Puiſqu'on a démontré (234) que les priſmes de baſes égales & de hauteurs égales, ſont égaux en ſolidité, il ſuit de cette propoſition, & de ce que nous venons de dire, que pour avoir le nombre de meſures cubes que renfermeroit le priſme quelconque *ACEGIKBDFH*, (*fig.* 111) il faut évaluer ſa baſe *KBDFH* en meſures quarrées, & ſa hauteur *LM* en parties égales au côté du cube qu'on prend pour meſure, & multiplier le nombre des meſures quarrées qu'on aura trouvées dans la baſe, par le nombre des meſures linéaires de la hauteur; ce qu'on exprime ordinairement en diſant : *La ſolidité d'un priſme quelconque eſt égal au produit de la ſurface de la baſe, par la hauteur de ce priſme.*

Mais nous devons obſerver ici la même choſe que nous avons fait remarquer (139) à l'occaſion des ſurfaces : de même qu'on ne peut pas dire avec exactitude, qu'on multiplie une ligne par une ligne, on ne peut pas dire non plus qu'on multiplie une ſurface par une ligne. C'eſt, ainſi qu'on vient de le voir, un ſolide (dont le nombre des cubes eſt le même que le nombre des quarrés de la baſe) qu'on répète autant de fois que la hauteur eſt compriſe dans celle du ſolide total, c'eſt-à-dire, au-

tant de fois qu'il eſt dans le ſolide qu'on veut meſurer.

237. Concluons de ce qui précède, que *pour avoir la ſolidité d'un cylindre droit ou oblique, il faut pareillement multiplier la ſurface de ſa baſe, par la hauteur de ce cylindre*, puiſqu'un cylindre eſt égal à un priſme de même baſe & de même hauteur que lui (234).

De la ſolidité des Pyramides.

238. Rappelons-nous ce qui a été dit (199 & *ſuiv.*) & en l'appliquant aux pyramides, nous en conclurons que ſi l'on coupe deux pyramides *IABCDF*, *IKLM*, (*fig.* 108), de même hauteur, par un même plan *ge*, parallèle au plan de leur baſe *, les ſections *abcdf*, *klm*, ſeront entr'elles dans le rapport des baſes *ABCDF*, *KLM*, & ſeront par conſéquent égales ſi ces baſes ſont égales. Si l'on conçoit de nouveau ces pyramides, coupées par un plan parallèle au plan *ge*, & infiniment près de celui-ci, on voit que les deux tranches ſolides, compriſes entre ces deux plans infiniment voiſins, doivent être auſſi entr'elles dans le rapport des baſes; car le nombre des points ſolides néceſſaires pour remplir ces deux tranches d'égale épaiſſeur, ne peut dépendre que de la grandeur des ſections correſpondantes.

Cela poſé, comme les deux pyramides ſont de même hauteur, on ne peut pas concevoir plus de tranches dans l'une que dans l'autre; ainſi les tranches correſpondantes étant toujours dans le rap-

* Nous ſuppoſons, pour plus de ſimplicité, qu'on ait rendu le ſommet commun, & qu'on ait placé les baſes ſur un même plan *GE*.

port des baſes, les totalités de ces tranches, & par conſéquent les ſolidités des pyramides, ſeront entre elles comme les baſes. Donc *les ſolidités de deux pyramides de même hauteur, ſont entr'elles comme les baſes de ces pyramides*, & par conſéquent *les pyramides de baſes égales & de hauteurs égales ſont égales en ſolidité, quelque différentes que ſoient d'ailleurs les figures des baſes.*

Meſure de la ſolidité des Pyramides.

239. Puiſque meſurer un corps, n'eſt autre choſe que chercher combien de fois il contient un autre corps connu, ou, en général, chercher quel eſt ſon rapport avec un autre corps connu; il ne s'agit donc, pour pouvoir meſurer les pyramides, que de trouver leur rapport avec les priſmes; c'eſt ce que nous allons établir dans la propoſition ſuivante.

240. *Une pyramide quelconque eſt le tiers d'un priſme de même baſe & de même hauteur qu'elle.*

La démonſtration de cette propoſition ſe réduit à faire voir qu'une pyramide triangulaire eſt le tiers d'un priſme triangulaire de même baſe & de même hauteur qu'elle; car on peut toujours concevoir un priſme, comme compoſé d'autant de priſmes triangulaires, & une pyramide comme compoſée d'autant de pyramides triangulaires qu'on peut concevoir de triangles dans le polygone, qui ſert de baſe à l'un & à l'autre, *voyez fig.* 111.

Or voici comment on peut ſe convaincre de la vérité de la propoſition, pour la pyramide triangulaire. Soit *ABCDEF*, (*fig.* 127), un priſme triangulaire : concevez que ſur les faces *AE*, *CE* de ce priſme, on ait tiré les deux

diagonales BD, BF, & que ſuivant ces diagonales on ait conduit un plan BDF; ce plan détachera du priſme une pyramide de même baſe & de même hauteur que ce priſme, puiſqu'elle a ſon ſommet en B dans la baſe ſupérieure, & qu'elle a pour baſe la baſe même inférieure DEF du priſme : on voit cette pyramide iſolée dans la *figure* 128; & la *figure* 129 repréſente ce qui reſte du priſme.

On peut ſe repréſenter ce reſte, comme renverſé ou couché ſur la face $ADFC$, & alors on voit que c'eſt une pyramide quadrangulaire, qui a pour baſe le parallélogramme $ADFC$, & pour ſommet le point B; donc, ſi l'on conçoit que dans la baſe $ADFC$ on ait tiré la diagonale CD, on pourra ſe repréſenter que la pyramide totale $ADFCB$ eſt compoſée de deux pyramides triangulaires $ADCB$, $CFDB$ qui auront pour baſes les deux triangles égaux ACD, CDF, & pour ſommet commun le point B, & qui, par conſéquent, ſeront égales (238). Or de ces deux pyramides, l'une, ſavoir la pyramide $ADCB$ peut être conçue comme ayant pour baſe le triangle ABC, c'eſt-à-dire, la baſe ſupérieure du priſme, & pour ſommet le point D qui a appartenu à la baſe inférieure; cette pyramide eſt donc égale à la pyramide $DEFB$ (*fig.* 128), puiſqu'elle a même baſe & même hauteur que celle-ci; donc les trois pyramides $DEFB$, $ADCB$, $CFDB$ ſont égales entr'elles; & puiſque réunies elles compoſent le priſme, il faut en conclure que chacune eſt le tiers du priſme; ainſi la pyramide $DEFB$ eſt le tiers du priſme $ABCDEF$ de même baſe & de même hauteur qu'elle.

241. Puiſqu'un cône peut être conſidéré comme

une pyramide, dont le contour de la base auroit une infinité de côtés; & le cylindre, comme un prisme, dont le contour de la base auroit aussi une infinité de côtés; il faut en conclure, qu'*un cône droit ou oblique, est le tiers d'un cylindre de même base & de même hauteur.*

242. Donc, *pour avoir la solidité d'une pyramide ou d'un cône quelconque, il faut multiplier la surface de la base par le tiers de la hauteur.*

243. A l'égard du tronc de pyramide ou de cône, lorsque les deux bases opposées sont parallèles, ce qu'il y a à faire pour en trouver la solidité, consiste à trouver la hauteur de la pyramide retranchée, & alors il est aisé de calculer la solidité de la pyramide entière & de la pyramide retranchée, & par conséquent celle du tronc. Par exemple, dans la *figure* 108, si je veux avoir la solidité du tronc $KLM\,klm$, je vois (242) qu'il faut multiplier la surface KLM, par le tiers de la hauteur IP; multiplier pareillement la surface klm par le tiers de la hauteur Ip, & retrancher ce dernier produit du premier; mais comme on ne connoît ni la hauteur de la pyramide totale, ni celle de la pyramide retranchée; voici comment on déterminera l'une & l'autre. On a vu ci dessus (199), que les lignes IL, IM, IP, &c. sont coupées proportionnellement par le plan ge, & qu'elles sont à leurs parties Il, Im, Ip, comme $LM : lm$; on aura donc $LM : lm :: IP : Ip$;

Donc (*Arith.* 174) $LM - lm : LM :: IP - Ip : IP$.

C'est-à-dire, $LM - lm : LM :: Pp : IP$.

Or quand on connoît le tronc, on peut aisément mesurer les côtés LM, lm & la hauteur Pp; on

pourra donc, par cette proportion, calculer le quatrième terme $I P$, ou la hauteur de la pyramide totale, & en retranchant celle du tronc, on aura la hauteur de la pyramide retranchée.

De la ſolidité de la Sphère, de ſes Secteurs, & de ſes Segmens.

244. *Pour avoir la ſolidité d'une ſphère, il faut multiplier ſa ſurface par le tiers du rayon.*

Car on peut conſidérer la ſurface de la ſphère comme l'aſſemblage d'une infinité de plans infiniment petits, dont chacun ſert de baſe à une petite pyramide, qui a ſon ſommet au centre de la ſphère, & qui, par conſéquent, a pour hauteur le rayon; puis donc que chacune de ces petites pyramides eſt égale (242) au produit de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur, c'eſt-à-dire, par le tiers du rayon; elles ſeront toutes enſemble égales au produit de la ſomme de toutes leurs baſes par le tiers du rayon, c'eſt-à-dire, égales au produit de la ſurface de la ſphère, par le tiers du rayon.

245. Puiſque la ſurface de la ſphère eſt (225) quadruple de celle d'un de ſes grands cercles, *on peut donc, pour avoir la ſolidité d'une ſphère, multiplier le tiers du rayon par quatre fois la ſurface d'un des grands cercles, ou quatre fois le tiers du rayon par la ſurface d'un des grands cercles, ou enfin les $\frac{4}{3}$ du diamètre par la ſurface d'un des grands cercles.*

246. Pour avoir la ſolidité d'un cylindre, nous avons vu qu'il falloit multiplier la ſurface de la baſe par la hauteur; s'il s'agit donc du cylindre circonſcrit à la ſphère (*fig.* 123), on peut dire

que la solidité est égale au produit d'un des grands cercles de la sphère, par le diamètre; or celle de la sphère (245) est égale au produit d'un des grands cercles par les $\frac{2}{3}$ du diamètre; donc *la solidité de la sphere n'est que les* $\frac{2}{3}$ *de celle du cylindre circonscrit.*

Si on veut comparer la solidité de la sphère au cube de son diamètre; en représentant par D le diamètre, on aura donc $\frac{2}{3} D \times cer.\ D$ pour cette solidité, ou bien $\frac{2}{3} D \times cir.\ D \times \frac{1}{4} D$, ou $\frac{1}{6} \overline{D}^3 \times cir.\ D$. Et le cube du diamètre sera $\overline{D}^3$, donc la solidité de la sphère est au cube de son diamètre, comme $\frac{1}{6} \overline{D}^2 \times cir.\ D. : \overline{D}^3$, ou $: : \frac{1}{6} cir.\ D : D$, ou $: : cir.\ D : 6\ D$; c'est-à-dire, comme la circonférence d'un cercle est à 6 fois son diamètre. Par exemple, en prenant le rapport de 22 : 7 pour celui du diamètre à la circonférence, la solidité de la sphère est au cube de son diamètre, comme 22 est à 42, ou comme 11 est à 21.

247. La surface de la calotte sphérique *AGBHEA* qui sert de base à un secteur sphérique *CBGEHA*, (*fig.* 121) peut être aussi considérée comme l'assemblage d'une infinité de plans infiniment petits, & par conséquent le secteur sphérique, lui-même, peut être considéré comme l'assemblage d'une infinité de pyramides, qui ont toutes pour hauteur le rayon, & dont la totalité des bases forme la surface de cette calotte; donc *le secteur sphérique est égal au produit de la surface de la calotte, par le* $\frac{1}{3}$ *du rayon.* Nous avons vu (226), comment on trouve la surface de la calotte.

248. A l'égard du segment, comme il vaut le secteur *CBGEHA* moins le cône *CBGEH*, il sera toujours facile à calculer; mais on peut le

calculer plus commodément à l'aide du principe ſuivant.

La ſolidité d'un ſegment ſphérique ABGEHA (fig. 121), *eſt égale à celle d'un cylindre qui auroit la flèche* AF *pour rayon de ſa baſe, & qui auroit pour hauteur le rayon* CA *de la ſphère moins le tiers de la flèche* AF.

Concevons la ſolidité de ce ſegment comme compoſée d'une infinité de tranches circulaires, paralléles à *BGHE*, & d'une épaiſſeur infiniment petite; le nombre des points ſolides de chaque tranche ne dépendant alors que de la ſection circulaire, pourra être repréſenté par cette ſection même; ainſi la tranche correſpondante à *IN*, par exemple, pourra être repréſentée par cer. *IN*.

Menons la corde *AN*; à cauſe du triangle rectangle *AIN* (170), on aura cer. *IN* égal à cer. *AN* — cer. *AI*; donc la ſomme des cer. *IN*, ou la ſolidité du ſegment, ſera égale à la ſomme des cer. *AN* moins la ſomme des cer. *AI* correſpondans. Voyons donc ce que vaut chacune de ces deux ſommes.

Puiſque (173) *AN* eſt moyenne proportionnelle entre *AI* & *AD*, cer. *AN* eſt (218) moitié de la ſurface d'un cylindre qui auroit *AI* pour rayon de ſa baſe, & *AD* pour hauteur, ou bien eſt égale à un cylindre qui auroit *AI* pour rayon de ſa baſe, & *AC* pour hauteur. Donc la ſomme des cer. *AN* ſera égale à la ſomme des enveloppes cylindriques qui ayant *AC* pour hauteur, auroient ſucceſſivement pour rayons de leurs baſes, les différentes lignes *AI*. Donc la ſomme des cer. *AN* eſt égale à la ſolidité d'un cylindre qui auroit *AC* pour hauteur, & *AF* pour rayon de ſa baſe.

A l'égard de la ſomme des cer. *AI*; ſi ſur *AC* on conçoit le quarré *ACPQ*, & qu'ayant tiré la

diagonale AP on prolonge NI juſqu'en R, on aura AI égale à IR; donc la ſomme des cer. NI ſera égale à la ſomme des cer. IR, laquelle priſe de A en F compoſe le cône qui auroit AF pour hauteur, & cer. FS ou cer. AF pour baſe. Elle eſt donc égale à ce cône, ou à un cylindre qui auroit auſſi cer. AF pour baſe, & $\frac{1}{3}$ AF pour hauteur. Donc la ſomme des cer. AN, moins la ſomme des cer. AI, c'eſt-à-dire la ſomme des cer. NI, ou la ſolidité du ſegment, eſt égale au cylindre qui auroit cer. AF pour baſe, & AC pour hauteur, moins le cylindre qui auroit auſſi cer. AF pour baſe, & $\frac{1}{3}$ AF pour hauteur; c'eſt-à-dire, eſt égale au cylindre qui auroit cer. AF pour baſe, & $CA - \frac{1}{3} AF$ pour hauteur.

Donc, pour avoir la ſolidité d'un ſegment ſphérique, il faut multiplier le cercle, qui a pour rayon la flèche, par le rayon de la ſphère moins le tiers de la flèche.

Pour donner un exemple du calcul de la ſolidité de la ſphère & de ſes ſegmens; ſuppoſons que l'on demande le poids d'une bombe de 10 pouces de diamètre, ayant 18 lignes d'épaiſſeur, avec un culot renforcé de 6 lignes de flèche. Le pied cube de fer coulé pèſe 519 liv. $\frac{1}{2}$.

Nous calculerons d'abord la ſolidité de la ſphère de 10 pouces; & enſuite nous calculerons celle d'une ſphère de 7 pouces; c'eſt-à-dire, de 10 pouces moins le double de l'épaiſſeur de la bombe; nous calculerons, dis-je, la ſolidité de cette dernière, diminuée de celle du culot de 6 lignes de flèche, c'eſt-à-dire, que nous ne calculerons de celle-ci que le ſegment ſphérique qui auroit 7 pouces moins 6 lignes, ou 6 pouces $\frac{1}{2}$ de flèche.

Pour avoir la ſolidité de la ſphère de 10 pouces, il faut (246) multiplier le cube de ſon diamètre par $\frac{11}{21}$; ainſi, opérant par logarithmes, j'ai

Log.	10	1,0000000
	-3	
Log.	10	3,0000000
Log.	11	1,0413927
Complément-Log.	21	8,6777807
Somme		12,7191734

Qui répond à 523,81 ; donc la sphère de 10 pouces de diamètre, a une solidité de 523,81 pouces cubes.

Pour avoir la solidité du segment sphérique de 6 pouces $\frac{1}{2}$ de flèche dans une sphère de 7 pouces de diamètre, il faut (248) multiplier la surface du cercle de 6 pouces $\frac{1}{2}$ de rayon, par le rayon de la sphère moins le tiers de la flèche ; c'est-à-dire, par 1 pouce & $\frac{1}{3}$.

Donc, & d'après ce qui a été dit (157), opérant par logarithmes, on aura

Log. $6\frac{1}{2}$.....	0,8129134
Log. $\overline{6\frac{1}{2}}^{2}$.....	1,6258268
Log. $\frac{22}{7}$.....	0,4973247
Log. $1\frac{1}{3}$.....	0,1249387
Somme.....	2,2480902
qui répond à.....	177,05

Donc, la solidité du vide de la bombe est de 177,05 pouces cubes, & par conséquent la solidité du plein est de 346,76 pouces cubes.

Il ne s'agit donc plus, pour avoir le poids de la bombe, que de multiplier par $519\frac{1}{4}$, & de diviser par 1728, parce que le poids d'un pouce cube est la 1728e partie de celui du pied cube ; ainsi,

Log. 346,76.....	2,5400290
Log. $519\frac{1}{4}$.....	2,7157945
Complément-Log. 1728.....	6,7624563
Somme.....	12,0182798
qui répond à.....	104lb,3

Qui est le poids de la bombe, ~~non compris~~ le vide de l'œil ni le poids des anses & anneaux.

De la mesure des autres Solides.

249. Pour les autres solides, terminés par des surfaces planes, la méthode qui se présente naturellement pour les mesurer, c'est de les imaginer composés de pyramides, qui aient pour bases ces surfaces planes, & pour sommet commun, l'un des angles du solide dont il s'agit ; mais outre que cette méthode est rarement la plus commode,

elle eſt d'ailleurs moins expéditive & moins propre pour la pratique, que la ſuivante.

250. Nous appellerons *priſme tronqué*, le ſolide *ABCDEF* (*fig.* 130), qui reſte lorſqu'on a ſéparé une partie d'un priſme, par un plan *ABC* incliné à la baſe.

251. *Un priſme triangulaire tronqué, eſt compoſé de trois pyramides, qui ont chacune pour baſe, la baſe* DEF *du priſme, & dont la première a ſon ſommet en* B, *la ſeconde en* A, *& la troiſième en* C.

Avec une légère attention, on peut ſe repréſenter le priſme tronqué, comme compoſé de deux pyramides, l'une triangulaire, qui aura ſon ſommet au point *B*, & pour baſe le triangle *DEF*; la ſeconde qui aura auſſi ſon ſommet au point *B*, mais qui aura pour baſe le quadrilatère *ADFC*.

Si l'on tire la diagonale *AF* de ce quadrilatère, on peut ſe repréſenter la pyramide quadrangulaire *BADFC* comme compoſée de deux pyramides triangulaires *BADF*, *BACF*; or la pyramide *BADF* eſt égale en ſolidité à une pyramide *EADF*, qui ayant la même baſe *ADF*, auroit ſon ſommet au point *E*, car la ligne *BE* étant parallèle au plan *ADF*, ces deux pyramides auront même hauteur; mais la pyramide *EADF* peut être conſidérée comme ayant pour baſe *EDF*, & ſon ſommet au point *A*; voilà donc, juſqu'ici, deux des trois pyramides, dont nous avons dit que le priſme tronqué doit être compoſé; il ne reſte donc plus qu'à faire voir que la pyramide *BACF* eſt équivalente à une pyramide qui auroit auſſi pour baſe *EDF*, & qui auroit ſon ſommet en C; or c'eſt ce qu'il eſt facile de voir en tirant la diagonale *CD*, & faiſant attention que la

pyramide *BACF* doit être égale à la pyramide *EDCF*; parce que ces deux pyramides ont leurs ſommets *B* & *E* dans la même ligne *BE* parallèle au plan *ACFD* de leurs baſes; & que ces baſes *ACF* & *CFD* ſont égales, puiſque ce ſont des triangles qui ont même baſe *CF*, & qui ſont compris entre les parallèles *AD* & *CF*; ainſi, la pyramide *BACF* eſt égale à la pyramide *EDCF*; mais celle-ci peut être conſidérée comme ayant pour baſe *DEF*, & ſon ſommet en *C*; donc, en effet, le priſme tronqué eſt compoſé de trois pyramides qui ont pour baſe commune le triangle *DEF*, & dont la première a ſon ſommet en *B*, la ſeconde en *A*, la troiſième en *C*.

252. Donc, *pour avoir la ſolidité d'un priſme triangulaire tronqué, il faut abaiſſer de chacun des angles de la baſe ſupérieure, une perpendiculaire ſur la baſe inférieure, & multiplier la baſe inférieure par le tiers de la ſomme de ces trois perpendiculaires.*

253. On peut tirer de cette propoſition pluſieurs conſéquences pour la meſure des priſmes tronqués autres que les triangulaires, & même pour d'autres ſolides; ſi l'on conçoit, par exemple, que de tous les angles d'un ſolide, terminé par des ſurfaces planes, on mène ſur un même plan, pris comme on le voudra, des perpendiculaires; on fera naître autant de priſmes tronqués qu'il y aura de faces dans le ſolide; comme chaque priſme tronqué devient facile à meſurer, d'après ce que nous venons de dire, tout ſolide terminé par des ſurfaces planes, ſe meſurera donc auſſi facilement par les mêmes principes.

254. Par exemple, s'il s'agit de trouver la ſolidité du corps *ABCDHEFG*

$ABCDHEFG$ (*fig.* 131 & 132), compoſé de deux priſmes triangulaires tronqués, dont les arêtes AE, BF, CG, DH, ſoient perpendiculaires à la baſe qui ſera d'ailleurs un quadrilatère quelconque.

On imaginera la diagonale EG, correſpondante à l'arête AC, & l'on aura $EFG \times \frac{AE+BF+CG}{3}$ pour la ſolidité de la partie qui répond au triangle EFG; on aura pareillement $EHG \times \frac{AE+DH+CG}{3}$ pour la ſolidité de la partie qui répond au triangle EHG.

255. Si les deux triangles EFG, EHG, ſont égaux, comme il arrive, lorſque la baſe eſt un parallélogramme, on aura $\frac{1}{2} EFGH \times \frac{2AE+2CG+BF+DH}{3}$ pour la ſolidité totale.

256. Si les perpendiculaires AE, BF, &c. reſtant les mêmes, la ſurface ſupérieure, au lieu d'être terminée par les deux plans ADC, ABC qui ont pour ſection commune AC, étoit terminée par deux plans qui euſſent pour ſection commune BD; alors la ſolidité ſeroit exprimée par $\frac{1}{2} EFGH \times \frac{2BF+2DH+AE+CG}{3}$.

Si après avoir ajouté ce ſolide au précédent, on prend moitié du tout, on aura $EFGH \times \frac{BF+DH+AE+CG}{4}$ pour la valeur du ſolide qui tiendroit le milieu entre les deux que nous venons de conſidérer pour chaque figure.

257. Cette dernière expreſſion renferme la règle que ſuivent pluſieurs Praticiens pour meſurer la ſolidité des corps tels que ceux des *fig.* 131 & 132; d'où l'on voit que cette règle n'eſt pas rigoureuſement exacte; on peut même ajouter qu'elle peut ſouvent conduire à une erreur aſſez forte; pour nous en convaincre, prenons un cas fort ſimple; ſuppoſons, *fig.* 132, que AE & GC ſoient chacune zéro; on aura $\frac{1}{2} EFGH \times \frac{BF+DH}{3}$ ou $EFGH \times \frac{BF+DH}{6}$ pour la ſolidité du corps repré-

ſenté par la *fig.* 132 ; mais par la règle dont il s'agit, on auroit $EFGH \times \frac{BF+DH}{4}$; or ces deux ſolides ſont l'un à l'autre : : $\frac{1}{6} : \frac{1}{4}$ ou : : 4 : 6 : : 2 : 3 ; cette règle feroit donc trouver la ſolidité trop forte de moitié en ſus de ſa véritable valeur ; il eſt vrai que dans ce cas, où il eſt facile de voir que le ſolide eſt compoſé de deux pyramides triangulaires, on verroit facilement que l'on ne doit point admettre cette règle ; mais il n'en eſt pas moins à conclure, de cette exemple ſimple, que l'application aux cas plus compoſés ne donne point une approximation ſuffiſante.

258. Tout ce que nous venons de dire, ne ſuppoſant point que *ABC* & *ADC*, (*fig.* 131 & 132), ſoient dans des plans différens, a également lieu lorſqu'ils ſont dans un même plan ; & puiſque ce qui a été dit (254) a lieu, lorſque la baſe eſt un quadrilatère quelconque, il eſt facile d'en conclure la meſure de la ſolidité d'un ponton, (*fig.* 133).

L'avant & l'arrière du ponton, ſes flancs, ſon fond, & ſon ouverture ſupérieure, ſont tous des ſurfaces planes ; & les arêtes formées par les flancs, le fond & l'ouverture, ſont des lignes parallèles ; l'ouverture a plus de largeur que le fond, en ſorte que la ſection faite perpendiculairement à ſa longueur eſt un trapèze tel que *EFGH*.

Si donc on conçoit le ponton coupé perpendiculairement à ſa longueur, & au milieu ; il réſulte évidemment de ce qui a été dit (254), que chaque moitié eſt un compoſé de deux priſmes triangulaires tronqués, dont l'un a pour expreſſion $EHG \times \frac{AE+DH+CG}{3}$ ou $EHG \times \frac{2AE+CG}{3}$ parce que *AE* eſt égal à *DH*. Pareillement le ſecond priſme triangulaire aura pour expreſſion $EFG \times \frac{2CG+AE}{3}$; donc le ponton entier aura pour expreſſion $EHG \times \frac{2AI+CL}{3} + EFG \times \frac{2CL+AI}{3}$. Or la profondeur du ponton étant connue, on aura la hauteur commune des deux triangles, qui par conſéquent ſeront faciles à calculer ; il ſera donc facile d'avoir la ſolidité du ponton : nous en verrons un exemple dans peu.

L'avant & l'arrière du ponton ſont communément inclinés de 45 degrés ſur le fond ; cette circonſtance peut fournir une

autre expreſſion ; mais comme elle n'eſt pas plus ſimple que la précédente, nous ne nous y arrêterons pas.

Du toiſé des Solides.

259. Pour toiſer un ſolide ; c'eſt-à-dire, pour évaluer un ſolide, en toiſes-cubes, & parties de la toiſe cube, on peut s'y prendre de deux manières principales. La première, eſt de compter par toiſes-cubes, & par parties-cubes de la toiſe-cube ; c'eſt-à-dire, par toiſes-cubes, pieds-cubes, pouces-cubes, &c.

La *toiſe-cube* ou *cubique* contient 216 pieds-cubes, parce que c'eſt un cube qui a 6 pieds de long, 6 pieds de large, & 6 pieds de haut.

Le *pied-cube* contient 1728 pouces-cubes, parce que c'eſt un cube qui a 12 pouces de long, ſur 12 pouces de large, & 12 pouces de haut.

Par la même raiſon, on voit que le *pouce-cube* contient 1728 lignes-cubes, & ainſi de ſuite.

Donc, pour évaluer un ſolide en toiſes-cubes & parties-cubes de la toiſe-cube, il faudra réduire chacune de ſes trois dimenſions à la plus petite eſpèce, multiplier deux de ces dimenſions ainſi réduites, l'une par l'autre, & le produit réſultant, par la troiſième ; & pour réduire en lignes-cubes, pouces-cubes, pieds-cubes & toiſes-cubes, (en ſuppoſant que la plus petite eſpèce ait été des points) on diviſera ſucceſſivement par 1728, 1728, 1728 & 216, ou ſeulement par 1728, 1728 & 216, ſi la plus petite eſpèce eſt ſeulement des lignes, & ainſi de ſuite.

EXEMPLE.

On veut avoir la ſolidité d'un parallélipipède qui a $2^T\ 4^P\ 8^P$ de long, $1^T\ 3^P$ de large, & $3^T\ 5^P\ 7^P$ de haut.

$2^T\ 4^P\ 8^P$ ..... 200^P
$1^T\ 3^P\ 6^P$ ..... 108^P

21600^{PP}

$3^T\ 5^P\ 7^P$ ..... 283^P

6112800^{PPP}

$6112800 \left\{ \begin{matrix} 1728 \\ 3537^P \end{matrix} \right.$
864

$3537^{PPP} \left\{ \begin{matrix} 216 \\ 16^{TTT} \end{matrix} \right.$
81^{PPP}

Ce parallélipipède contient donc $16^{TTT}\ 81^{PPP}\ 864^{PPP}$.

260. Dans la ſeconde manière d'évaluer les ſolides, en toiſes-cubes & parties de la toiſe-cube, on ſe repréſente la toiſe-cube partagée en ſix parallélipipèdes, qui ont tous une toiſe quarrée de baſe, ſur un pied de haut, & que pour cette raiſon on appelle *toiſe-toiſe-pieds*. On conçoit de même la toiſe-toiſe-pied, partagée en 12 parallélipipèdes, qui ont chacun une toiſe quarrée de baſe & un pouce de haut, & qu'on appelle *toiſe-toiſe-pouces*; on ſubdiviſe de même chacune de celles-ci, en 12 parallélipipèdes, qui ont chacun une toiſe quarrée de baſe, ſur une ligne de haut; & on continue de ſubdiviſer en parallélipipèdes, qui ont conſtamment une toiſe quarrée de baſe, ſur un point, une prime, une ſeconde, &c. de haut; en ſorte que les ſubdiviſions ſont abſolument analogues à celle de la toiſe linéaire, comme nous avons vu que l'étoient celles de la toiſe quarrée; & les noms de ces différentes ſubdiviſions, ne différent de ceux qui ſont relatifs à la toiſe quarrée, qu'en ce que le mot *toiſe* y eſt énoncé deux fois.

Les multiplications relatives à cette diviſion de la toiſe-cube, ſont abſolument les mêmes que celles que nous avons enſeignées, relativement à la toiſe quarrée.

A l'égard de la nature des unités des facteurs, on doit regarder l'un d'entr'eux comme exprimant des toiſes-cubes, toiſe-toiſe-pieds, toiſe-toiſe-pouces, &c. & les deux autres comme marquant des nombres abſtraits, dont le produit exprimera combien de fois on doit répéter ce premier facteur.

Mais pour ſe guider plus aiſément dans ces multiplications, on laiſſera aux facteurs les ſignes de la toiſe, tels qu'ils les ont, il ſuffit de ſavoir, que le produit doit être des toiſes-cubes, toiſes-toiſes-pieds, &c. ainſi, en opérant comme au toiſé des ſurfaces, on trouvera comme il ſuit :

EXEMPLE.

On demande la ſolidité du même ſolide que ci-deſſus, évaluée ſuivant cette ſeconde méthode.

	2^{T}	4^{P}	8^{P}
	1^{T}	3^{P}	
	2.	4.	8
Pour 3^{P}	1.	2.	4
	4^{TT}	1^{TP}	0^{TP}
	3^{T}	5^{P}	7^{P^0}
	12.	3.	0
Pour 3^{P}	2.	0.	6
Pour [illegible]	1.	2.	4
Pour 6^{P^0}	0.	2.	1
Pour 1^{P^0}	0.	0.	4. 2
Solidité	16^{TTT}	2^{TTP}	3^{TTP^0} 2^{TTL}

261. Il eſt aiſé de convertir ces parties de la toiſe, en parties-cubes; c'eſt-à-dire, pieds cubes, pouces-cubes, &c. Il faut écrire ſous les parties de la toiſe, à commencer des toiſe-toiſe-pieds, les

nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$, 36, 3, $\frac{1}{4}$ *conſécutivement, & multiplier* chaque nombre ſupérieur par ſon correſpondant inférieur, porter les produits des nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$, chacun au-deſſous du premier de ces nombres, & lorſqu'en multipliant par $\frac{1}{4}$, il reſtera 1 ou 2 ou 3; on écrira ſous le nombre 36 ſuivant, 432 ou 864 ou 1296, pour commencer une ſeconde colonne; appliquant ceci à l'exemple que nous venons de donner.

$$\begin{array}{cccccc} 16^{TTT} & 2^{TTP} & 3^{TTP} & 2^{TTl} & 0^{TTpt} \\ & 36 & 3 & \frac{1}{4} & 36 \\ \hline 16^{TTT} & 72^{PPP} & \ldots\ldots & & 864^{PPP} \\ & 9 & & & \\ \hline 16^{TTT} & 81^{PPP} & & & 864^{PPP}. \end{array}$$

On trouve le même produit que par la première méthode.

On multiplie les toiſes-toiſes-pieds par 36, parce que la toiſe-toiſe-pied ayant un pied de haut ſur une toiſe quarrée ou 36 pieds quarrés de baſe, doit contenir 36 pieds-cubes. La toiſe-toiſe-pouce étant la douzième partie de la toiſe-toiſe pied, doit contenir la douzième partie de 36 pieds-cubes; c'eſt-à-dire, 3 pieds-cubes; il faut donc multiplier par 3 les toiſe-toiſe-pouces; pareillement la toiſe-toiſe ligne étant la douzième partie de la toiſe-toiſe pouce, doit contenir la douzième partie de 3 pieds-cubes ou un quart de pied-cube, ou (à cauſe que le pied-cube vaut 1728 pouces-cubes) elle doit contenir 432^{PPP}; en raiſonnant de même, on voit que la toiſe-toiſe-point vaudroit 36^{PPP}, parce qu'elle eſt la douzième partie de la toiſe-toiſe-ligne, qui vaut 432^{PPP}, dont la douzième partie vaut 36; donc, &c.

Donc, réciproquement, pour ramener les parties cubes de la toiſe-cube, à des toiſes-toiſe-pieds, toiſe-toiſe-pouces, &c. il faudra diviſer par 36, le nombre des pieds cubes, & l'on aura les toiſes toiſe-pieds : on diviſera le reſte de cette diviſion par 3, & l'on aura les toiſe-toiſe-pouces. On multipliera par 4 le reſte de cette ſeconde diviſion, & au produit on ajoutera 1 ou 2 ou 3 unités, ſelon que le nombre des pouces-cubes ſera entre

432 & 864, ou 864 & 1296, ou 1296 & 1728, & l'on aura les toiſe-toiſe lignes ; puis retranchant du nombre des pouces-cubes le nombre 432 ou 864, ou 1296, ſelon qu'on aura ajouté 1, ou 2, ou 3 unités, on opérera ſur le reſte, comme on a opéré ſur les pieds-cubes, & l'on aura conſécutivement les toiſe-toiſe-points, les toiſe-toiſe-primes, & les toiſe-toiſe-ſecondes ; enfin on continuera de la même manière pour les lignes-cubes, &c.

Par exemple, ſi on demande de réduire en toiſe-toiſe-pieds, toiſe-toiſe-pouces, &c. le nombre $47^{TTT}\,52^{PTP}$, 932^{PPP} ; je diviſe 52 par 36, & j'ai 1^{TTP}, & un reſte de 16 ; je diviſe celui-ci par 3, & j'ai 5^{TTpo} & un reſte de 1 ; je quadruple ce reſte & j'y ajoute 2 unités, parce que le nombre des pouces-cubes eſt entre 864 & 1296, & j'ai 6^{TTl}. Retranchant 864 de 932, il reſte 68 ; je le diviſe par 36, & j'ai 1^{TTpt}, & 32 de reſte ; je diviſe celui-ci par 3, & j'ai 10^{TPt}, & 2 de reſte ; je quadruple ce reſte, & j'ai $8^{TT''}$, en ſorte que j'ai, en total, $47^{TTT}\,1^{TTP}\,5^{TTpo}\,6^{TTl}\,1^{TTpt}\,10^{TT'}\,8^{TT''}$.

262. Si au lieu de rapporter la ſolidité à la toiſe-cube, on vouloit la rapporter au pied-cube, on le pourroit également, en concevant le pied-cube comme compoſé de douze parallélipipèdes, qui ont tous 1 pied quarré de baſe, ſur 1 pouce de hauteur chacun, & qu'on marqueroit ainſi $P\,P\,p$, pour exprimer *pied-pied-pouces* ; c'eſt ainſi que nous allons en uſer dans l'exemple ſuivant.

Exemple appliqué à la ſolidité d'un Ponton.

Soit (*fig.* 133), la plus grande largeur EH, de	4^P	4^{po}
La plus petite FG, de	4.	2.
Leur diſtance ou le creux du ponton	2.	4.
La plus grande longueur AI	18.	0.
La plus petite CL	13.	4.
Donc 2 $AI+CL$	49.	4.
Et 2 $CL+AI$	44.	8.

Je calcule la ſurface du triangle *EHG*, & celle du triangle *EFG*, qui ont pour hauteur commune le creux du ponton, & je trouve comme il ſuit.

		4^{P}	4^{Po}					4^{P}	2^{Po}		
		2.	4.					2.	4.		
		8.	8.					8.	4.		
Pour	4^{Po}...	1.	5.	4.		Pour	4^{Po}..	1.	4.	8.	
Som.		10.	1.	4.		Som.		9.	8.		
Moitié		5^{PP}	0^{Pp}	8^{Pl}	Tr. *EHG.*	Moitié		8^{PP}	10^{Pp}	4^{Pl}	Tr. *EFG.*

Je multiplie la première par 2 $AI + CL$, & la ſeconde par 2 $CL + AI$, & prenant le tiers du tout, j'ai la ſolidité du ponton, comme il ſuit.

		5^{PP}	0^{Pp}	8^{Pl}				4^{PP}	10^{Pp}	4^{Pl}	
		49^{P}.	4^{Po}.					44^{P}	8^{Po}		
		247.	8.	8.				213.	10.	8.	
Pour	4^{Po}..	1.	8.	2.	8.	Pour	6^{Po}..	2.	5.	2.	
						Pour	2^{Po}..	0.	9.	8.	8.
Somme..		249^{PPP}	4^{PPp}	10^{PPl}	8^{PPpt}	Somme..		217^{PPP}	1^{PPpo}	6^{PPl}	8^{PPpt}

Réuniſſant ces deux ſommes, & prenant le tiers, on a $155^{PPP}\ 6^{PPp}\ 9^{PPpt}\ 4^{PPl}$ pour la ſolidité du ponton.

EXEMPLE appliqué au toiſé d'une Batterie.

Pour donner encore une application des priſmes tronqués & du toiſé, ſuppoſons que l'on demande la quantité de terre néceſſaire à la conſtruction de l'épaulement d'une batterie de quatre pièces de canon.

La longueur d'une pareille batterie eſt de $13^{T}\ 2^{P}$ par le bas. La hauteur de l'épaulement, en dedans, eſt ordinairement de $1^{T}\ 1^{P}$, & en dehors elle eſt $1^{T}\ 0^{R}\ 4^{Po}$. Le talut intérieur eſt le tiers de la hauteur intérieur, & l'extérieur eſt la moitié de la hauteur extérieure; ainſi le premier eſt de $2^{P}\ 4^{Po}$, & le ſecond de $3^{P}\ 2^{Po}$; la largeur de la baſe eſt de $3^{T}\ 5^{P}\ 6^{Po}$, ainſi la largeur au ſommet extérieur de l'épaulement, eſt de $3^{T}\ 0^{P}\ 0^{Po}$. On donne aux deux côtés de l'épaulement le même talut qu'au dedans; c'eſt-à-dire, le tiers de la hauteur intérieure vers le dedans, & le tiers de la hauteur extérieure vers le dehors; ainſi la longueur intérieure de l'épaulement, vers le haut, eſt de $13^{T}\ 3^{P}\ 4^{Po}$, & ſa longueur extérieure vers le haut, eſt de $13^{T}\ 3^{P}\ 8^{Po}\ 4^{l}$.

Ces dimenſions établies, on peut conſidérer le maſſif de la batterie, (abſtraction faite des embraſures) comme un priſme tronqué, dont la coupe faite perpendiculairement à ſa longueur ſeroit le trapeze *EFGH*, (*fig.* 134) dont

La baſe *HE* eſt de.....	3T	5P	6P
Le talut intérieur *HK*.....	0.	2.	4
La hauteur *GK* de l'angle *G*.....	1.	1.	0
Le talut extérieur *IE*.....	0.	3.	2
La hauteur *IF* de l'angle *F*.....	1.	0.	4

Et ſi on conçoit que cette coupe ſoit faite au milieu de la longueur, ce priſme total eſt partagé en deux priſmes droits, tronqués, parfaitement égaux, & qui ont chacun pour baſe le trapeze *EFGH*. Si l'on imagine donc la diagonale *GE*, il ſuit de ce qui a été dit (254), qu'on aura la ſolidité d'une des moitiés en multipliant le triangle *EFC* par le ⅓ de la ſomme des trois arêtes, qui, d'un même côté, répondent aux angles *F*, *E*, *G*, y ajoutant le produit du triangle *EGH*, multiplié pareillement par la ſomme des trois arêtes, qui, du même côté répondent aux angles, *E*, *G*, *H*, & doublant le tout; mais puiſque ces arêtes ſont moitié des longueurs qui répondent à ces mêmes angles, ou des arêtes du priſme total, il s'enſuit que l'opération conſiſte à multiplier le triangle *EFC* par le tiers de la ſomme des trois arêtes totales qui répondent aux angles *E*, *F*, *G*, & le triangle *EGH* par le tiers de la ſomme de celles qui répondent aux trois angles *E*, *G*, *H*, & à ajouter ces deux produits.

Or ces arêtes ſont reſpectivement comme il ſuit.

Arêtes	En *E*.....	13T	2P	0P	0l
	En *G*.....	12.	3.	4.	0
	En *F*.....	12.	3.	9.	4
	En *H*.....	13.	2.	0.	0

Le tiers des trois arêtes en *E*, *F*, *G*, ſera donc.....	12T	5P	0P	5l	4Pc.
Et le tiers des trois arêtes en *E*, *G*, *H*, ſera.....	13T	0P	5l0	4l	

Il ne s'agit donc que d'avoir la ſurface du triangle *EFC*, & celle du triangle *EGH*; or la ſeconde eſt évidemment égale à $\frac{HE \times GK}{2}$, & la première qui eſt la différence entre le quadrilatère *EFGH* & le triangle *EGH*, ſera $EK \times \frac{1}{2} FI$

$-EI \times \frac{1}{2} GK$, d'où & d'après les meſures ci-deſſus, on trouvera, comme il ſuit.

Le triangle EGH.....	2^{TT}	1^{TP}	8^{Tp}	6^{Tl}	0^{Tpt}
$EK \times \frac{1}{2} FI$.....	1.	5.	2.	0.	8
$EI \times \frac{1}{2} GK$.....	0.	1.	10.	2.	0
Triangle EFG.....	1.	3.	3.	10.	8
Donc le priſme correſpondant au triangle EGH.....	29^{TTT}	5^{TTP}	2^{TTp}	8^{TTl}	2^{TTpt} $8^{TT'}$
Et le priſme correſpondant au triangle FGE.....	19.	5.	8.	7.	2. 1
Maſſif de la batterie.....	49^{TTT}	4^{TTP}	$1\,1^{TTp}$	5^{TTl}	4^{TTpt} $9^{TT'}$

A l'égard des embraſures, ſi l'on ſuppoſe que leur fond eſt horizontal, que l'ouverture intérieure eſt de deux pieds haut & bas; l'extérieure de 9^{P} en bas, & de 12 pieds 6^{Po} en haut; que la hauteur de l'embraſure eſt de 3^{P} 6^{P} du côté intérieur de la batterie; en concevant chacune coupée perpendiculairement à la longueur de la batterie, on verra que le profil peut en être repréſenté par le quadrilatère $FGDM$, dans lequel on aura GO de 3^{P} 6^{P}, FN de 2^{P} 10^{P}, & les taluts DO & NM ſeront; ſavoir, DO de 1^{P} 2^{Po} & NM de 1^{P} 5^{P}; d'où on conclura que DM eſt de 3^{T} 2^{P} 7^{P}; & comme le ſolide de l'embraſure eſt auſſi un priſme tronqué, dont toutes les dimenſions ſont actuellement connues; on conclura, par un calcul ſemblable au précédent, que le ſolide des quatre embraſures eſt de 6^{TTT} 3^{TTP} 1^{TTp} 6^{TTl} 3^{TTpt} $1^{TT'}$, lequel retranché du maſſif trouvé ci-deſſus, il reſte 43^{TTT} 1^{TTP} 9^{TTp} 9^{TTl} 1^{TTpt} $8^{TT'}$ pour la totalité des terres néceſſaires à la conſtruction de l'épaulement; d'où il eſt facile de conclure le nombre de travailleurs néceſſaires pour conſtruire cette batterie, dans un temps déterminé, ſachant par expérience que trois hommes, ſans trop ſe fatiguer, peuvent creuſer & rapporter ſur la batterie une toiſe cube en 18 heures.

263. Puiſque, pour avoir la ſolidité d'un priſme, il faut multiplier la ſurface de ſa baſe, par ſa hauteur: il s'enſuit, que ſi connoiſſant la ſolidité & la baſe, ou la hauteur, on veut avoir la hauteur ou la baſe, il faut diviſer la ſolidité par celui de ces deux facteurs que l'on connoîtra; mais il faut obſerver que dans l'exactitude, ce n'eſt point vérita-

blement la ſolidité que l'on diviſe par la ſurface ou par la hauteur; mais c'eſt un ſolide que l'on diviſe par un ſolide; en effet, d'après ce qui a été dit ci-deſſus, on voit que lorſqu'on évalue un ſolide, on répète un autre ſolide de même baſe, autant de fois que la hauteur de celui-ci eſt contenue dans la hauteur du premier, ou bien on répète un ſolide de même hauteur, autant de fois que la ſurface de la baſe de celui-ci, eſt compriſe dans la baſe de celui-là. Donc, quand on voudra, connoiſſant la ſolidité, & la ſurface de la baſe, par exemple, connoître la hauteur; il faudra chercher combien de fois la ſolidité propoſée contient celle d'un ſolide de même baſe & qui a pour hauteur, l'unité; le quotient marquera par le nombre de ſes unités, le nombre des parties de la hauteur.

Cela poſé, ſi ayant, par exemple, un priſme dont la ſolidité ſoit de $16^{TTT}\ 2^{TTP}\ 3^{TTP}\ 2^{TTI}$, & la ſurface de la baſe, de $12^{TP}\ 0^{TP}\ 0^{TP}$, on veut ſavoir quelle eſt la hauteur; on conſidèrera le diviſeur, non pas comme $12^{TT}\ 0^{TP}\ 0^{TP}$, mais comme $12^{TTP}\ 0^{TTP}\ 0^{TTP}$, & alors la queſtion ſe réduira à diviſer $16^{TTT}\ 2^{TTP}\ 3^{TTP}\ 2^{TTI}$ par $12^{TTT}\ 0^{TTP}\ 0^{TTP}$; mais comme la toiſe quarrée eſt facteur commun, le quotient ſera le même que ſi le dividende & le diviſeur marquoient des toiſes linéaires; on aura donc ſimplement $16^{T}\ 2^{P}\ 3^{P}\ 2^{I}$, à diviſer par $12^{T}\ 0^{P}\ 0^{P}$, c'eſt-à-dire par 12^{T}; & comme la nature de la queſtion fait voir que le quotient doit être des toiſes linéaires, la diviſion ſe fera donc ſelon la règle preſcrite (*Arith. 118 & ſuiv.*)

Si la ſolidité & la hauteur étant données, on cherche quelle doit être la ſurface de la baſe; par exemple, ſi la ſolidité eſt $16^{TTT}\ 2^{TTP}\ 3^{TTP}\ 2^{TTI}$, & la hauteur de $2^{T}\ 4^{P}\ 8^{P}$; on conſidèrera le diviſeur comme étant $2^{TTT}\ 4^{TTP}\ 8^{TTP}$; & par la même raiſon que dans le cas précédent, l'opération ſe réduira à diviſer $16^{T}\ 2^{P}\ 3^{P}\ 2^{I}$, par $2^{T}\ 4^{P}\ 8^{P}$; mais comme le quotient doit évidemment être une ſurface, on le comptera, non pas pour des toiſes linéaires, mais pour des toiſes quarrées, toiſe-pieds, &c. du reſte il n'y aura aucune différence dans la manière de faire l'opération qui ſe fera toujours en vertu des règles données (*Arith. 118 & ſuiv.*) c'eſt-à-dire, qu'après avoir trouvé le quotient, comme s'il devoit exprimer des toiſes linéaires;

on affectera le ſigne de chaque partie de la lettre *T*. Par exemple, dans le cas préſent, on trouveroit pour quotient $5^{T}\,5^{P}\,4^{P}\,6^{Pl}$; on écrira donc $5^{TT}\,5^{TP}\,4^{Tp}\,6^{Tl}$.

Si la ſolidité étoit donnée en toiſes-cubes, & parties-cubes de la toiſe-cube, on la convertiroit en toiſes-cubes, toiſe toiſe-pieds, &c. par ce qui a été dit (261), & l'opération ſeroit ramenée au cas précédent.

Du Toiſé des Bois.

264. Ce qu'on vient de dire du toiſé en général, ne nous laiſſe que fort peu de choſe à dire ſur le toiſé des bois.

Dans l'Artillerie & dans l'Architecture, l'uſage eſt de réduire en ſolives.

Par *ſolive*, on entend un parallélipipède de deux toiſes de haut, ſur 6 pouces d'équarriſſage, ou 36 pouces quarrés de baſe; ce qui eſt équivalent à un parallélipipède de une toiſe de haut ſur $\frac{1}{2}$ pied quarré ou 72 pouces quarrés de baſe, & qui par conſéquent contient 3 pieds-cubes.

On partage la ſolive en ſix parties, chacune d'un pied de haut & de 72 pouces quarrés de baſe, & chacune de ces parties s'appelle *pied de ſolive*. On partage de même le pied de ſolive, en douze parties d'un pouce de haut & de 72 pouces quarrés de baſe chacune, qu'on appelle *pouces de ſolive*, & ainſi de ſuite.

Puiſque la ſolive contient 3 pieds-cubes, ou la 72e partie d'une toiſe-cube, & que ſes ſubdiviſions ſont les mêmes que celles de la toiſe-cube en toiſe-toiſe-pieds, &c. il s'enſuit que le nombre qui exprimeroit un ſolide quelconque, en ſolives & parties de ſolive, eſt 72 fois plus grand que celui qui l'exprimeroit en toiſes-cubes, toiſe-toiſe-pieds, &c.

D'après ces différentes manières d'enviſager la

ſolive, on peut facilement imaginer différentes méthodes pour toiſer les bois en ſolives ; nous nous bornerons à expoſer la ſuivante.

Pour évaluer la ſolidité d'un corps en ſolives, il n'y a qu'à l'évaluer en toiſes-cubes, toiſe-toiſe-pieds, &c. & multiplier enſuite le produit par 72; mais on peut éviter cette multiplication en faiſant une réflexion aſſez ſimple. Il n'y a qu'à regarder l'une des dimenſions comme douze fois plus grande; c'eſt-à-dire, regarder les lignes comme exprimant des pouces, les pouces comme exprimant des pieds, & ainſi de ſuite. Regarder pareillement une autre des trois dimenſions comme ſix fois plus grande, ou les lignes comme exprimant des demi-pieds; alors multipliant ces deux nouvelles dimenſions entr'elles, & le produit par la troiſième, on aura tout de ſuite la ſolidité en ſolives, pieds de ſolive, &c.

EXEMPLE.

On demande le nombre des ſolives & parties de ſolive d'une pièce de bois de $8^T\ 5^P\ 6^P$ de long ſur $1^P\ 7^P$ de large, & $1^P\ 5^{Po}$ d'épaiſſeur.

Au lieu de $1^P\ 7^P$ je prends..... $3^T\ 1^P$
c'eſt-à-dire, douze fois plus.
Au lieu de $1^P\ 5^{Po}$, je prends..... $1^T\ 2^P\ 6^{Po}$
c'eſt-à-dire, ſix fois plus.

Je multiplie ces deux dimenſions l'une par l'autre,

$$\begin{array}{r} 1^T\ 2^P\ 6^P \\ 3^T\ 1^P \\ \hline 4.\ 1.\ 6 \\ 0.\ 1.\ 5 \\ \hline 4^{TT}\ 2^{TP}\ 11^{TP} \end{array}$$

Et je multiplie ce produit, par la troiſième dimenſion ;

	4^{TT}	2^{TP}	11^{TP}	
	8^{T}	5^{P}	6^{P}	
	35.	5.	4	
Pour 3^{P}.....	2.	1.	5.	6
Pour 2^{P}.....	1.	2.	11.	8
Pour 6^{P}.....	0.	2.	2.	11
	40^{TTT}	0^{TTP}	0^{TTP}	1^{TTl}

Et au lieu de compter ce produit en toiſes, je le compte en ſolives, & j'ai

$40^{\text{ſolives}}\ 0^{\text{pieds}}\ 0^{\text{pouces}}\ 1^{\text{ligne}}$,

dont les pieds, pouces & lignes expriment des pieds, pouces & lignes de ſolive.

265. Quelques toiſeurs diviſent autrement la ſolive. En ſe la repréſentant comme un parallélipipède de 2 toiſes de haut ſur 36 pouces quarrés de baſe, ils la diviſent en douze parties qu'ils appellent des pieds ; ils diviſent ce pied en 12 pouces, & le pouce en trois parties qu'ils appellent *chevilles*. Ainſi leur pied de ſolive eſt la moitié du pied de ſolive ordinaire ; il en eſt de même du pouce, & chaque cheville vaut 2 lignes de ſolive.

266. Pour les bois qu'on reçoit dans l'Artillerie, on entend par équarriſſage, le quarré inſcrit au cercle qu'on a pris pour baſe dans un corps d'arbre non équarri ou en grume. Ce quarré qui a pour diagonale le diamètre, eſt (168) la moitié du quarré du diamètre ou du quarré circonſcrit. Comme les arbres vont en diminuant de groſſeur à meſure qu'on s'éloigne du pied, on les regarde dans la pratique, comme des cylindres de même longueur que le corps de l'arbre, mais d'un diamètre égal à celui de l'arbre vers le milieu de ſa hauteur. On diminue encore ce diamètre de quelques pouces par rapport à l'écorce & à l'aubier, mais cette diminution varie ſelon la nature des bois, & le pays.

Lorſqu'on a meſuré ce diamètre, on le rend 12 fois plus grand, & on le multiplie par ce même diamètre rendu ſix fois plus grand ; la moitié de ce produit qu'on appelle *baſe de ſolive* du bois équarri, exprime, en ſous-entendant une toiſe de longueur, le nombre des ſolives & parties de ſolive que contient une toiſe de longueur de l'arbre équarri. En ſorte que pour avoir le nombre total des ſolives de cet arbre, il ne s'agit plus que de multiplier par le nombre des toiſes & parties de toiſe de ſa longueur.

Et pour avoir le nombre des ſolives du même arbre en *grume*, on multiplie le quarré du diamètre rendu 72 fois plus grand comme il vient d'être dit, par $\frac{11}{7}$, & on prend moitié ; ce qui donne la ſurface du cercle qui ſert de baſe au cylindre dont la ſolidité eſt priſe pour celle de l'arbre ; on appelle cette ſurface, *baſe de ſolive du bois en grume*. Enfin on multiplie cette baſe de ſolive par le nombre des toiſes & parties de toiſe de la longueur de l'arbre.

EXEMPLE.

On demande la baſe de ſolive tant équarrie, qu'en grume, pour un arbre de 25 pouces de diamètre.

A 25 pouces je ſubſtitue 25 pieds ou.....$4^{T}\ 1^{P}\ 5^{P}$

D'un autre côté, à 25 pouces, je ſubſtitue 25 demi-pieds ou.....$2^{T}\ 0^{P}\ 6^{p}$.

Je multiplie l'un par l'autre, & j'ai.....$8^{TT}\ 4^{TP}\ 1^{TP}$

dont la moitié.....$4^{TT}\ 2^{TP}\ 0^{TP}\ 6^{TI}$

comptée en ſolives, donne pour la baſe de ſolive équarrie.....$4^{ſol.}\ 2^{P}\ 0^{P}\ 6^{L}$.

Puis pour avoir la baſe de ſolive en grume, je multiplie par $\frac{11}{7}$, la quantité $8^{TT}\ 4^{TP}\ 1^{TP}$, ce qui me donne $13^{TT}\ 3^{TP}\ 10^{TP}\ 2^{TI}$

dont la moitié..... 6. 4. 11. 1.

comptée en ſolives, donne pour la baſe de ſolive en grume.....$6^{ſol.}\ 4^{P}\ 11^{P}\ 1^{L}$.

Des Rapports des Solides en général.

267. *Comparer deux ſolides*, c'eſt chercher combien de fois le nombre de meſures d'une certaine eſpèce, contenues dans l'un de ces ſolides, contient le nombre de meſures, de même eſpèce contenues dans l'autre.

268. *Deux priſmes ou deux cylindres, ou un priſme & un cylindre, ſont entr'eux comme les produits de leur baſe par leur hauteur.* Cela eſt évident, puiſque chacun de ces ſolides eſt égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur, quelle que ſoit d'ailleurs la figure de la baſe.

Donc *les priſmes ou les cylindres, ou les priſmes & les cylindres de même hauteur, ſont entr'eux*

comme leurs baſes ; & les priſmes & les cylindres de même baſe, ſont entr'eux comme leurs hauteurs ; car le rapport des produits des baſes par les hauteurs, ne change point lorſqu'on y omet le facteur commun qui s'y trouve lorſque la baſe ou la hauteur ſe trouve être la même dans les deux ſolides.

Donc *deux pyramides quelconques, ou deux cônes; ou une pyramide & un cône, ſont dans le rapport des hauteurs, lorſque les baſes ſont égales ;* car ces ſolides ſont chacun le tiers d'un priſme de même baſe & de même hauteur.

269. *Les ſolidités des pyramides ſemblables, ſont entr'elles comme les cubes des hauteurs de ces pyramides, ou en général, comme les cubes de deux lignes homologues de ces pyramides.*

Car deux pyramides ſemblables peuvent être repréſentées par deux pyramides telles que *IABCDF*, *Iabcdf* (*fig.* 108), puiſque ces deux pyramides ſont compoſées d'un même nombre de faces ſemblables chacune à chacune, & ſemblablement diſpoſées. Puis donc que deux pyramides ſont, en général, comme les produits de leurs baſes par leurs hauteurs, les baſes qui ſont ici des figures ſemblables, étant entr'elles comme les quarrés des hauteurs *IP*, *Ip* (202), les deux pyramides ſeront entr'elles comme les produits des quarrés des hauteurs, par les hauteurs mêmes ; car on pourra (99) ſubſtituer au rapport des baſes, celui des quarrés des hauteurs. Et puiſque (199) les hauteurs ſont proportionnelles à toutes les autres dimenſions homologues, leurs cubes ſeront donc auſſi proportionnels aux cubes de ces dimenſions homologues (*Arith.* 181) ; donc en général deux pyramides ſemblables ſont entr'elles comme les cubes de leurs dimenſions homologues.

270.

270. Donc *en général les ſolidités de deux corps ſemblables, ſont entr'elles comme les cubes des lignes homologues de ces ſolides.* Car les ſolides ſemblables peuvent être partagés en un même nombre de pyramides ſemblables chacune à chacune ; & comme deux quelconques de ces pyramides ſemblables ſeront entr'elles en même rapport, puiſqu'elles ſont entr'elles comme les cubes de leurs dimenſions homologues, leſquelles ſont en même rapport que deux autres dimenſions homologues quelconques ; il s'enſuit que la ſomme des pyramides du premier ſolide, ſera à la ſomme des pyramides du ſecond, auſſi dans le même rapport des cubes des dimenſions homologues.

Donc *les ſolidités des ſphères ſont entr'elles comme les cubes de leurs rayons ou de leurs diamètres.*

Ces principes peuvent ſervir à réſoudre pluſieurs queſtions de la nature des ſuivantes.

1°. *Connoiſſant le poids d'un pied cube de poudre, trouver le côté d'un fourneau cubique qui doit contenir un poids donné de poudre.*

Les poids de différens volumes d'une même eſpèce de matière étant proportionnels à ces volumes, ſont proportionnels aux cubes de leurs dimenſions, lorſqu'ils ſont ſemblables.

Ainſi, ſuppoſant que le pied cube de poudre contienne 64 liv. ſi l'on veut avoir le côté d'un fourneau cubique contenant 10 liv. de poudre, on fera cette propotion, 64 : 10 comme le cube de 1 eſt à un quatrième terme qui ſera le cube du côté cherché, lequel ſera donc $\frac{10}{64}$, dont la racine cubique $\frac{2,154}{4}$ ou $0^{P},538$ ou $0^{P}\ 6^{P}\ 5^{l}$ eſt le côté cherché.

Si dans cette opération on veut employer les logarithmes ; au logarithme de 10, on ajoutera (*Arith.* 231) le complément arithmétique du logarithme de 64 ; ce qui donne 9,193820 à la caractériſtique duquel (*Arith.* 231) j'ajoute 20, & prenant le tiers de la ſomme 29,193820, j'ai 9,731273 pour le logarithme de la racine cubique, ou du côté cherché ; la caractériſtique étant trop forte de 10 unités. Je la diminue donc d'autant d'unités qu'il eſt néceſſaire pour trouver le reſte dans les tables, & je trouve 5386 pour le nombre qui correſpond

au logarithme reſtant 3,731273 dont la caractériſtique étant trop forte encore de 4 unités, me fait connoître que le nombre cherché, eſt à moins d'un dix-millième près, 0,5386 qui donne, comme ci-deſſus $0^{P}\ 6^{Po}\ 5^{l}$.

Dans l'exemple précédent, nous avons pris 64 liv. pour le poids d'un pied cube de poudre; & ce l'eſt en effet, à peu près. Mais dans les charges des fourneaux on ne doit pas compter ſur ce pied, à cauſe de la paille, des ſacs à terre, &c. qu'on emploie néceſſairement. Mais en ſuppoſant qu'on emploie toujours de ces derniers, proportionnellement à la quantité de poudre, il ſuffit de ſavoir une fois pour toutes, quel eſt le poids de la poudre qui entre dans un fourneau d'un pied cubique, pour pouvoir déterminer de la même manière le côté de tout autre fourneau qui contiendroit un poids connu de poudre, avec les autres matières qui doivent y entrer.

2°. *Connoiſſant les poids de deux boulets, & le diamètre de l'un; pour avoir le diamètre de l'autre, on ſe conduira comme il ſuit.*

Par exemple, le diamètre du boulet de 24, eſt de $5^{P}\ 5^{l}\ 4^{Po}$ ou $5^{P},444$; on demande le diamètre du boulet de 12.

Les ſolidités doivent donc être : : 24 : 12 ou : : 2 : 1. Donc les cubes des diamètres doivent auſſi être : : 2 : 1; ainſi du triple du logarithme de 5,444, je retranche le logarithme de 2, & j'ai 1,906724 dont le tiers 0,635575 cherché avec une caractériſtique plus forte de trois unités, répond à 4321; donc le diamètre cherché, eſt de $4^{P},321$ ou $4^{P}\ 3^{l}\ 10^{Pts}$.

Si l'on n'avoit pas de tables de logarithmes, on cuberoit $5^{P},444$, & l'ayant diviſé par 2, on extrairoit la racine cubique du quotient.

Par les mêmes principes, on peut réſoudre les deux queſtions ſuivantes; mais le principe donné (246) peut en fournir encore une ſolution plus facile, comme il ſuit.

Trouver le diamètre d'une ſphère qui auroit une ſolidité connue. Par exemple, pour faire une ſphère qui contienne 10 pieds cubes de matière; on fera cette proportion, 11 : 21 : : 10 eſt à un quatrième terme qui ſera le cube du diamètre cherché; extrayant donc la racine cubique de ce quatrième terme, on aura le diamètre.

Si on opère par logarithmes, on trouvera comme il ſuit....

Log. 10.....	1,000000.
Log. 21.....	1,322219.
Somme.....	2,322219.
Log. 11.....	1,041393.
Reſte.....	1,280826.
dont le tiers.....	0,426942.

étant cherché avec une caractériſtique plus forte de trois unités, donne $2^{P},673$ ou $2^{P}\ 8^{P}\ 0^{l}\ 11^{pts}$ pour le diamètre cherché.

Le même principe peut être employé à *déterminer le diamètre des balles de plomb ſuivant leur nombre à la livre.*

Par exemple, ſachant que le pied cube de plomb pèſe 828 liv. on demande le diamètre d'une balle de 16 à la livre.

Puiſqu'il doit y en avoir 16 dans la livre, il y en aura donc 16 fois 828 ou 13248 dans un pied cube; la ſolidité de chacune ſera donc la $\frac{1}{13248}^{e}$ partie d'un pied cube. Je fais donc cette proportion 11 : 21 :: $\frac{1}{13248}$ eſt à un quatrième terme qui ſera le cube du diamètre cherché; ou bien réduiſant le pied cube en lignes cubes, je fais cette proportion 11 : 21 :: $\frac{1728 \times 1728}{16 \times 828}$ eſt à un quatrième terme qui ſera $\frac{1728 \times 1728 \times 21}{16 \times 828 \times 11}$.

Opérant par logarithmes.....

		Log. $\overline{1728}^{2}$.....	6,475088
Log. 16.....	1,204120	Log. 21.....	1,322219
Log. 828.....	2,918030	Somme.....	7,797307
Log. 11.....	1,041393		5,163543
Somme.....	5,163543	Diff. des 2 Somes....	2,633764
		dont le tiers.....	0,877921

étant cherché avec une caractériſtique plus forte de deux unités ſeulement, donne $7^{l},55$ ou $7^{l}\ 6^{pts}\ \frac{1}{5}$ pour le diamètre de chaque balle.

Donc, en ſe rappellant tout ce qui a précédé, on voit 1°. que les contours des figures ſemblables, ſont dans le rapport ſimple des lignes homologues. 2°. Que les ſurfaces des figures ſemblables, ſont entr'elles comme les quarrés des côtés ou des lignes homologues. 3°. Que les ſolidités des corps ſemblables, ſont entr'elles comme les cubes des lignes homologues.

Ainſi, ſi deux corps ſemblables, deux ſphères, par exemple, avoient leurs diamètres dans le rapport de 1 à 3, les circonférences de leurs grands cercles ſeroient auſſi dans le rapport de 1 à 3; les ſurfaces de ces ſphères ſeroient comme 1 à 9, & les ſolidités comme 1 à 27; c'eſt-à-dire, que la circonférence d'un des grands cercles de la ſeconde vaudroit trois fois celle d'un

des grands cercles de la première ; la ſurface de la ſeconde vaudroit neuf fois celle de la première ; & enfin la ſeconde ſphère vaudroit 27 ſphères telles que la première.

Puiſque les ſurfaces des corps ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés des lignes homologues ; les lignes homologues ſeront donc entr'elles comme les racines quarrées de ces ſurfaces ; & les ſolides qui ſont comme les cubes des lignes homologues, ſeront donc comme les cubes des racines quarrées des ſurfaces. Les ſurfaces ſeront donc auſſi, entre elles, comme les quarrés des racines cubiques des ſolidités.

DE LA TRIGONOMÉTRIE PLANE.

271. LA *Trigonométrie plane* eſt une partie de la Géométrie, qui enſeigne à déterminer ou à calculer trois des ſix parties d'un triangle rectiligne, par la connoiſſance des trois autres parties, lorſque cela eſt poſſible.

Je dis, lorſque cela eſt poſſible, parce que ſi l'on ne connoiſſoit que les trois angles, par exemple, on ne pourroit pas déterminer les côtés. En effet, ſi par un point P pris à volonté ſur le côté AB du triangle ABC (*fig.* 135), dont je ſuppoſe qu'on connoiſſe les trois angles, on mène PE parallèle à AC, on aura un autre triangle BPE qui aura les mêmes angles que le triangle ABC; & on voit qu'on en peut former ainſi une infinité d'autres qui auront les mêmes angles. Il faudroit donc que le calcul donnât tout à la fois une infinité de côtés différens.

La queſtion eſt donc alors abſolument indéterminée. Nous verrons, cependant, que ſi l'on ne peut déterminer les valeurs des côtés, on peut du moins, déterminer leur rapport.

Mais lorſque parmi les trois choſes connues ou données, il entrera un côté, on peut toujours déterminer tout le reſte. Il y a cependant un cas où il reſte quelque choſe d'indéterminé : le voici.

Suppoſé que dans le triangle ABC (*fig.* 135) on connoiſſe les deux côtés AB & BC, & l'angle A oppoſé à l'un de ces côtés, on ne peut déterminer

la valeur de l'angle C ni celle du côté AC, qu'autant qu'on ſaura ſi cet angle C eſt aigu ou obtus ; en effet, ſi l'on conçoit que du point B comme centre & d'un rayon égal au côté BC, on ait décrit un arc CD, & que du point D où cet arc rencontre AC, on ait tiré BD ; on aura un nouveau triangle ABD, dans lequel on connoîtra les mêmes choſes qu'on connoît dans le triangle ABC, ſavoir, l'angle A, le côté AB, & le côté BD égal à BC ; on a donc ici les mêmes choſes pour déterminer l'angle BDA, qu'on avoit dans le triangle ABC pour déterminer l'angle C.

Mais il y a cette différence entre ce cas-ci & le précédent, qu'on peut ici aſſigner la valeur de l'angle C & de l'angle BDA, comme nous le verrons ci-après : la ſeule choſe qui ſoit indéterminée, c'eſt de ſavoir laquelle de ces deux valeurs on doit adopter, & par conſéquent quelle figure doit avoir le triangle. Il faut donc, outre les trois choſes données, ſavoir encore ſi l'angle cherché doit être aigu ou obtus. Au reſte on peut remarquer, en paſſant, que les deux angles C & BDA dont il s'agit, ſont ſupplément l'un de l'autre ; car BDA eſt ſupplément de BDC qui eſt égal à l'angle C, parce que le triangle BDC eſt iſocèle.

272. Ce ne ſont pas les angles mêmes qu'on emploie dans le calcul des triangles : on ſubſtitue aux angles, des lignes qui, ſans leur être proportionnelles, ſont néanmoins propres à repréſenter ces angles, & ſont d'ailleurs plus commodes à employer dans le calcul, parce que, comme nous le verrons ci-après, elles ſont proportionnelles aux côtés des triangles ; il convient donc, avant que d'aller plus loin, de faire connoître ces lignes & de faire voir comment elles peuvent tenir lieu des angles.

Des Sinus, Cosinus, Tangentes, Cotangentes, Sécantes & Cosécantes.

273. La perpendiculaire *AP* (*fig.* 136) abaissée de l'extrémité d'un arc *AB* sur le rayon *BC* qui passe par l'autre extrémité *B* de cet arc, s'appelle le *sinus droit*, ou simplement le *sinus* de l'arc *AB* ou de l'angle *ACB*.

La partie *BP* du rayon, comprise entre le sinus & l'extrémité de l'arc, s'appelle le *sinus-verse*.

La partie *BD* de la perpendiculaire à l'extrémité du rayon, interceptée entre ce rayon *BC* & le rayon *CA* prolongé, s'appelle la *tangente* de l'arc *AB* ou de l'angle *ACB*.

La ligne *CD*, qui n'est autre chose que le rayon *CA* prolongé jusqu'à la tangente, s'appelle *sécante* de l'arc *AB* ou de l'angle *ACB*.

Si l'on mène le rayon *CF* perpendiculaire à *CB*, & à son extrémité *F* la perpendiculaire *FE* qui rencontre en *E* le rayon *CA* prolongé, & qu'enfin on mène *AQ* perpendiculaire sur *CF*; il suit des définitions précédentes, que *AQ* sera le sinus, *FQ* le sinus-verse, *FE* la tangente, & *CE* la sécante de l'arc *AF* ou de l'angle *ACF*.

Mais comme l'angle *ACF* est complément de *ACB*, puisque ces deux angles font ensemble un angle droit, on peut dire que *AQ* est le sinus du complément; *FQ*, le sinus-verse du complément; *FE*, la tangente du complément; & *CE*, la sécante du complément de l'arc *AB*, ou de l'angle *ACB*.

Pour abréger ces dénominations, on est convenu de dire *cosinus*, au lieu de sinus du complément; *cosinus-verse*, au lieu de sinus-verse du complément; *cotangente*, au lieu de tangente du complément; & *cosécante*, au lieu de sécante du complément.

En ſorte que les lignes AQ, FQ, FE, CE, ſeront dites le coſinus, le coſinus-verſe, la cotangente, & la coſécante de l'arc AB ou de l'angle ACB; de même les lignes AP, BP, BD & CD pourront être dites le coſinus, le coſinus-verſe, la cotangente, & la cóſécante de l'arc AF ou de l'angle ACF; car AB eſt complément de AF, comme AF l'eſt de AB.

Pour déſigner ces lignes, lorſqu'il ſera queſtion d'un angle ou d'un arc, nous mettrons devant les lettres qui ſervent à nommer cet angle ou cet arc, les expreſſions abrégées, ſin. coſ. tang. cot. ainſi ſin. AB, ſignifiera le ſinus de l'arc AB; ſin. ACB, ſignifiera le ſinus de l'angle ACB; de même coſ. AB, coſ. ACB, ſignifieront le coſinus de l'arc AB, le coſinus de l'angle ACB; & pour déſigner le rayon, nous prendrons la lettre R.

274. Il eſt évident, 1°. que *le coſinus* AQ *d'un arc quelconque* AB, *eſt égal à la partie* CP *du rayon, compriſe entre le centre & le ſinus.*

2°. Que *le ſinus-verſe* BP *eſt égal à la différence entre le rayon & le coſinus.*

3°. Que *le ſinus d'un arc quelconque* AB, *eſt la moitié de la corde* AG *d'un arc double* ABG. Car le rayon CB étant perpendiculaire ſur la corde AG, diviſe cette corde & ſon arc en deux parties égales (52).

275. De cette dernière propoſition, il ſuit que *le ſinus de* 30 *degrés, vaut la moitié du rayon*; car il doit être la moitié de la corde de 60 degrés, ou du côté de l'hexagone, que nous avons vu (93) être égal au rayon.

276. *La tangente de* 45 *degrés eſt égale au*

rayon. Car ſi l'angle *ACB* eſt de 45 degrés, comme l'angle *CBD* eſt droit, l'angle *CDB* vaudra auſſi 45 degrés ; le triangle *CBD* ſera donc iſocèle, & par conſéquent *BD* ſera égal à *CB*.

277. A meſure que l'arc *AB* ou l'angle *ACB* augmente, ſon ſinus *AP* augmente, & ſon coſinus *AQ* ou *CP* diminue, juſqu'à ce que l'arc *AB* ſoit devenu de 90 degrés ; alors le ſinus *AP* devient *FC*, c'eſt-à-dire, égal au rayon, & le coſinus eſt zéro, parce que le point *A* tombant en *F*, la perpendiculaire *AQ* devient zéro.

A l'égard de la tangente *BD*, & de la cotangente *FE*, il eſt viſible que la tangente *BD* augmente continuellement, & que la cotangente, au contraire, diminue, mais, l'une & l'autre, de manière que quand l'arc *AB* eſt devenu de 90 degrés, ſa tangente eſt infinie, & ſa cotangente eſt zéro : en effet, plus l'arc *AB* devient grand, plus le point *D* s'éléve au-deſſus de *BC*, & quand le point *A* eſt infiniment près de *F*, les deux lignes *CD* & *BD* ſont preſque parallèles, & ne ſe rencontrent plus qu'à une diſtance infinie ; donc *BD* eſt alors infinie ; donc elle l'eſt quand le point *A* tombe ſur le point *F*.

278. Ainſi *pour l'arc de 90 degrés, le ſinus eſt égal au rayon, le coſinus eſt zéro, la tangente eſt infinie, & la cotangente eſt zéro.*

Comme le ſinus de 90 degrés eſt le plus grand de tous les ſinus, on l'appelle, pour le diſtinguer des autres, *ſinus total* ; en ſorte que ces trois expreſſions, le *ſinus de 90 degrés*, le *rayon*, le *ſinus total*, ſignifient la même choſe.

279. Lorſque l'arc *AB* paſſe 90^d (*fig.* 137)

ſon ſinus AP diminue, & ſon coſinus AQ ou CP qui tombe alors au-delà du centre par rapport au point B, augmente juſqu'à ce que l'arc AB ſoit devenu de 180 degrés, auquel cas le ſinus eſt zéro, & le coſinus eſt égal au rayon. On voit auſſi que le ſinus AP, & le coſinus CP de l'arc AB, ou de l'angle ACB plus grand que 90 degrés, appartiennent en même temps à l'arc AH ou à l'angle ACH moindre que 90 degrés & ſupplément de celui-là ; de ſorte que, *pour avoir le ſinus & le coſinus d'une angle obtus, il faut prendre le ſinus & le coſinus de ſon ſupplément.* Mais il faut bien remarquer que le coſinus tombe du côté oppoſé à celui où il tomberoit, ſi l'arc AB ou l'angle ACB étoit moindre que 90 degrés.

A l'égard de la tangente, comme elle eſt déterminée (273) par la rencontre de la perpendiculaire BD (*fig.* 136) avec le rayon CA prolongé, il eſt viſible que lorſque l'arc AB (*fig.* 137) eſt de plus de 90 degrés, elle eſt alors BD ; mais en élevant la perpendiculaire HI, il eſt aiſé de voir que le triangle CBD eſt égal au triangle CHI, & que par conſéquent BD eſt égal à HI.

280. Donc *la tangente d'un arc ou d'un angle plus grand que 90 degrés, eſt la même que celle du ſupplément de cet arc :* toute la différence qu'il y a, c'eſt qu'elle tombe au-deſſous du rayon BC. Pour la cotangente EF, elle eſt auſſi la même que la cotangente du ſupplément ; & elle tombe auſſi du côté oppoſé à celui où elle tomberoit, ſi l'arc AB ou l'angle ACB étoit moindre que 90 degrés. On voit encore, & par la même raiſon que ci-deſſus, que pour 180 degrés, la tangente eſt zéro, & la cotangente infinie.

Des Tables des Sinus, Tangentes, &c.

281. Concevons que le quart de circonférence *BF* (*fig.* 136) ſoit diviſé en arcs de 1′, c'eſt à-dire, en 5400 parties égales, & que de chaque point de diviſion, on abaiſſe des perpendiculaires ou ſinus tels que *AP*, ſur le rayon *BC*; concevons auſſi ce rayon *BC* diviſé en un très-grand nombre de parties égales, en 100000, par exemple; chaque perpendiculaire contiendra un certain nombre de ces parties du rayon: ſi donc, par quelque moyen que ce ſoit, on pouvoit parvenir à déterminer le nombre de parties de chacune de ces perpendiculaires, il eſt viſible que ces lignes pourroient être employées pour fixer la grandeur des angles; en ſorte que ſi ayant écrit par ordre, dans une colonne, toutes les minutes depuis zéro juſqu'à 90 degrés, on écrivoit dans une colonne à côté & vis à-vis de chaque minute, le nombre de parties de la perpendiculaire correſpondante, on pourroit, par le moyen de cette table, aſſigner quel eſt le nombre de degrés d'un angle dont le nombre de parties de la perpendiculaire ou du ſinus, ſeroit connu; & réciproquement, connoiſſant le nombre des degrés & parties de degrés de l'angle, on pourroit aſſigner le nombre des parties de ſon ſinus. Cette Table auroit cette utilité, non-ſeulement pour tous les arcs ou angles dont le rayon auroit le même nombre de parties qu'on en auroit ſuppoſé à celui d'après lequel on a conſtruit la table, mais encore pour tout autre, dont le rayon ſeroit connu; par exemple, ſuppoſons un angle *DCG* (*fig.* 143) dont le côté ou rayon *CD* ſoit de 8 pieds, & la perpendiculaire *DE*, de 3 pieds; & imaginons que *CA* ſoit le rayon ſur

lequel on a calculé les tables ; ſi l'on imagine l'arc AB & la perpendiculaire AP, cette perpendiculaire ſera le ſinus des tables ; or je puis trouver aiſément de combien de parties eſt cette perpendiculaire ; car comme les triangles CDE, CAP ſont ſemblables (à cauſe des parallèles DE & AP), j'aurai $CD : DE :: CA : AP$, c'eſt-à-dire, $8^p : 3^p :: 100000 : AP$; je trouverai donc (*Arith.* 169) que AP vaut 37500 ; je n'aurai donc qu'à chercher ce nombre dans la table parmi les ſinus, & je trouverai à côté, le nombre des degrés & minutes de l'angle DCG ou DCE.

Réciproquement ſi l'on donnoit le nombre des degrés & minutes de l'angle DCG & ſon rayon CD, on détermineroit de même la valeur de la perpendiculaire DE ; car ſachant quel eſt le nombre de degrés & minutes de cet angle, on trouveroit dans la table, quel eſt le nombre de parties de la perpendiculaire ou du ſinus AP qui répond à ce nombre de degrés ; & alors, en vertu des triangles ſemblables, CAP, CDE, on auroit cette proportion $CA : AP :: CD : DE$, par laquelle il ſeroit facile de calculer DE, puiſque les trois premiers termes CA, AP & CD ſont connus, ſavoir CA & AP par les tables, & CD eſt donné en pieds.

On voit par-là quelles ſont ces lignes que nous avons dit ci-deſſus (272) pouvoir être ſubſtituées aux angles, dans le calcul des triangles ; ce ſont les ſinus.

282. Mais les ſinus ne ſont pas les ſeules lignes qu'on emploie : on fait uſage auſſi des tangentes & même des ſécantes. Ces lignes ſont faciles à calculer quand une fois on a calculé tous les ſinus ; car comme le triangle CPA & le triangle CBD

(*fig.* 136) ſont ſemblables, on en peut tirer ces deux proportions :

$$CP : PA :: CB : BD$$
$$\& \; CP : CA :: CB : CD,$$

c'eſt-à-dire (en faiſant attention que CP eſt égal à AQ),

$$\text{cof. } AB : \text{ſin. } AB :: R : \text{tang. } AB$$
$$\& \; \text{cof. } AB : \quad R \quad :: R : \text{séc. } AB.$$

Or on voit que dans chacune de ces deux proportions, les trois premiers termes ſont connus, lorſqu'on connoît tous les ſinus ; puiſque le coſinus d'un arc n'eſt autre choſe que le ſinus du complément de cet arc : il ſera donc aiſé d'en conclure (*Arith.* 169) la valeur du quatrième terme de chacune, & par conſéquent des tangentes & des ſécantes, & par conſéquent auſſi des cotangentes & des coſécantes, qui ne ſont autre choſe que des tangentes & des ſécantes de complément.

Les livres qui renferment les valeurs de toutes les lignes dont il vient d'être queſtion, ſont ce qu'on appelle des *Tables de Sinus* ; elles renferment ordinairement, non-ſeulement les valeurs numériques de toutes ces lignes, mais encore leurs logarithmes qu'on emploie auſſi ſouvent qu'on le peut, à la place des valeurs numériques. Voyons actuellement les principes ſur leſquels ces Tables ſont calculées.

283. *Pour avoir le coſinus d'un arc dont le ſinus eſt connu, il faut retrancher le quarré du ſinus, du quarré du rayon, & tirer la racine quarrée du reſte.* Car le coſinus AQ (*fig.* 136) eſt égal à PC qui eſt côté de l'angle droit dans le triangle rectangle APC, dont on connoît alors l'hypothénuſe AC & le côté AP (165).

Ainſi ſi l'on demandoit le coſinus de 30 degrés ; comme nous avons vu (275) que le ſinus de cet arc eſt la moitié du rayon que nous ſuppoſerons ici de 100000 parties, ce ſinus ſeroit 50000 ; retranchant ſon quarré, 2500000000 du quarré 10000000000 du rayon, on a 7500000000, dont la racine quarrée 86603 eſt le coſinus de 30 degrés, ou le ſinus de 60 degrés.

284. *Connoiſſant le ſinus d'un arc* AB (fig. 138) *pour avoir celui de ſa moitié*, il faut d'abord calculer le coſinus *CP* de ce premier arc ; ce coſinus étant calculé, on le retranchera du rayon, ce qui donnera le ſinus-verſe *BP* : on quarrera la valeur de *BP*, & on ajoutera ce quarré avec celui du ſinus *AP* ; la ſomme (164) ſera le quarré de la corde *AB* ; tirant la racine quarrée de cette ſomme, on aura *AB*, dont la moitié eſt le ſinus *BI* de l'arc *BD* moitié de *AB* (274).

285. *Connoiſſant le ſinus* BI *d'un arc* BA (*fig.* 139) *pour trouver le ſinus* DP *du double* BAD *de cet arc*, on calculera le coſinus *CI* de *BA*, & on fera cette proportion, *R* : coſ. *BA* :: 2 ſin. *BA* : ſin. *BAD*, dans laquelle les trois premiers termes ſeront alors connus, & dont il ſera facile de calculer le quatrième.

Cette proportion eſt fondée ſur ce que les deux triangles *CBI* & *BDP* ſont ſemblables ; parce qu'outre l'angle droit en *P* & en *I*, ils ont d'ailleurs l'angle *B* commun ; ainſi on a *CB* : *CI* :: *DB* : *DP*. Or *CI* (273) eſt le coſinus de *BA* ; & *DB* le double de *BI* ſinus de *BA* ; *DP* eſt le ſinus de *BAD* ; & *CB* eſt le rayon ; donc *R* : coſ. *BA* :: 2 ſin. *BA* : ſin. *BAD*.

286. *Connoiſſant les ſinus des deux arcs* AB, AC (fig. 140), *pour trouver le ſinus de leur ſomme ou de leur différence* ; il faut, après avoir calculé (283)

les cosinus de ces mêmes arcs, multiplier le sinus du premier par le cosinus du second, & le sinus du second par le cosinus du premier. La somme de ces deux produits, divisée par le rayon, sera le sinus de la somme des deux arcs; & la différence de ces mêmes produits, divisée par le rayon, sera le sinus de la différence de ces mêmes arcs.

Faites l'arc AD égal à l'arc AC, tirez la corde CD, le rayon LA qui divisera cette corde en deux parties égales au point I, des points C, A, I & D, abaissez les perpendiculaires CK, AG, IH, DF, sur BL; enfin des points I & D menez IM & DN, parallèles à BL. Puisque CD est divisée en deux parties égales en I, CN sera aussi divisée en deux parties égales en M (102).

Cela posé, CK qui est le sinus de BC somme des deux arcs, est composé de KM & de MC, ou de IH & de MC. DF qui est le sinus de BD différence des deux arcs, est égal à KN qui vaut KM moins MN, c'est-à-dire IH moins CM; ainsi pour trouver le sinus de la somme, il faut ajouter la valeur de MC à celle de IH; & au contraire l'en retrancher, pour avoir le sinus de la différence.

Or les triangles semblables LAG, LIH donnent $LA : LI :: AG : IH$, c'est-à-dire, R : cos. AC :: sin. AB : IH; donc (*Arith.* 169) IH vaut $\frac{\text{sin. } AB \times \text{cos. } AC}{R}$.

Les triangles LAG & CIM semblables parce qu'en vertu de la construction qu'on a faite, ils ont les côtés perpendiculaires l'un à l'autre, donnent $LA : LG :: CI : MC$, ou R : cos. AB :: sin. AC : MC; donc MC vaut $\frac{\text{sin. } AC \times \text{cos. } AB}{R}$; donc il faut ajouter $\frac{\text{sin. } AC \times \text{cos. } AB}{R}$ avec $\frac{\text{sin. } AB \times \text{cos. } AC}{R}$ pour avoir

le ſinus de la ſomme, & l'en retrancher au contraire, pour avoir le ſinus de la différence.

287. *Pour avoir le coſinus de la ſomme ou de la différence de deux arcs dont on connoît les ſinus ;* il faut, après avoir calculé (283) les coſinus de chacun de ces deux arcs, multiplier ces deux coſinus l'un par l'autre ; multiplier pareillement les deux ſinus ; alors retranchant le ſecond produit du premier, & diviſant le reſte par le rayon, on aura le coſinus de la ſomme des deux arcs. Au contraire, pour avoir celui de la différence, on ajoutera les deux produits, & on en diviſera la ſomme, par le rayon. Car puiſque DC eſt coupée en deux parties égales en I, FK ſera coupée en deux parties égales en H; or LK qui eſt le coſinus de la ſomme, vaut LH moins HK, ou LH moins IM; & LF qui eſt le coſinus de la différence, vaut LH plus HF, ou LH plus HK, ou enfin LH plus IM : voyons donc quelles ſont les valeurs de LH & de IM.

Les triangles ſemblables LGA, LHI donnent $LA : LI :: LG : LH$.

C'eſt-à-dire, R : cof. AC : : cof. AB : LH;

Donc LH vaut $\frac{\text{cof. } AC \times \text{cof. } AB}{R}$.

Les triangles ſemblables LAG, CIM donnent $LA : AG :: CI :: IM$,

C'eſt-à-dire, R : ſin. AB : : ſin. AC : IM;

Donc IM vaut $\frac{\text{ſin. } AB \times \text{ſin. } AC}{R}$.

Il faut donc, pour avoir le coſinus de la ſomme, retrancher $\frac{\text{ſin. } AB \times \text{ſin. } AC}{R}$ de $\frac{\text{cof. } AB \times \text{cof. } AC}{R}$; & au contraire, l'ajouter pour avoir le coſinus de la différence.

288. *La ſomme des ſinus des deux arcs* AB, AC

AC (fig. 141) *eſt à la différence de ces mêmes ſinus, comme la tangente de la moitié de la ſomme de ces deux arcs, eſt à la tangente de la moitié de leur différence*, c'eſt-à-dire, que *ſin.* AB + *ſin.* AC : *ſin.* AB − *ſin.* AC :: *tang.* $\frac{AB+AC}{2}$: *tang.* $\frac{AB-AC}{2}$.

Après avoir tiré le diamètre *AM*, portez l'arc *AB* de *A* en *D*; tirez la corde *BD* qui ſera perpendiculaire ſur *AM*. Par le point *C*, tirez *CP*, perpendiculaire, & *CF* parallèle à *AM*. Du point *F*, menez les cordes *FB* & *FD*, & d'un rayon *FG* égal à celui du cercle *BAD*, décrivez l'arc *IGK* rencontrant *CF* en *G*, & en ce point *G*, élevez *HL* perpendiculaire à *CF*; les lignes *GH* & *GL* ſont les tangentes des angles *GFH* & *GFL*, ou *CFB* & *CFD* qui ayant leurs ſommets à la circonférence, ont pour meſure la moitié des arcs *CB*, *CD* ſur leſquels ils s'appuient (63), c'eſt-à-dire, la moitié de la différence *BC*, & la moitié de la ſomme *CD* des deux arcs *AB*, *AC*; ainſi *GL* & *GH* ſont les tangentes de la moitié de la ſomme, & de la moitié de la différence de ces mêmes arcs.

Cela poſé, il eſt viſible que *DS* étant égal à *BS*, la ligne *DE* vaut *BS* + *SE* ou *BS* + *CP*, c'eſt-à-dire, la ſomme des ſinus des arcs *AB*, *AC*; pareillement *BE* vaut *BS* − *SE* ou *BS* − *CP*, c'eſt-à-dire, la différence des ſinus de ces mêmes arcs. Or, à cauſe des parallèles *BD*, *HL*, on a (115) *DE* : *BE* :: *LG* : *GH*.

Donc ſin. *AB* + ſin. *AC* : ſin. *AB* − ſin. *AC* :: tang. $\frac{AB+AC}{2}$: tang. $\frac{AB-AC}{2}$.

289. C'eſt d'après ces principes que l'on peut conſtruire une table des ſinus.

En effet, on connoît le ſinus de 30d par ce qui a été dit (275);

& par ce qui a été dit (284), on peut trouver celui de 15^d, & ſucceſſivement ceux de $7^d\ 3'$, $3^d\ 45'$, $1^d\ 52'\ 30''$, $0^d\ 56'\ 15''$, $0^d\ 28'\ 7''\ 30'''$, $0^d\ 14'\ 3''\ 45'''$, $0^d\ 7'\ 1''\ 52'''\ 30^{iv}$.

Cela poſé, on remarquera que quand les arcs ſont fort petits, ils ne diffèrent pas ſenſiblement de leurs ſinus, & ſont par conſéquent proportionnels à ces ſinus; ainſi pour trouver le ſinus de $1'$, on fera cette proportion, *l'arc de* $0^d\ 7'\ 1''\ 52'''\ 30^{iv}$, *eſt à l'arc de* $0^d\ 1'$, *comme le ſinus de ce premier arc eſt au ſinus de* $1'$.

Si dans ce calcul on ſuppoſe le rayon de 100000 parties ſeulement, il faudra calculer les ſinus des arcs que nous venons de rapporter, avec trois, & même quatre décimales, pour être en droit d'en conclure les ſuivans, à moins d'une unité près; ces décimales ne ſeront d'uſage que pour le calcul des ſinus des autres arcs, & on les ſupprimera quand tout le calcul ſera fini.

Depuis $1'$ juſqu'à $3^d\ 0'$, il ſuffira de multiplier le ſinus de $1'$ ſucceſſivement par 2, 3, 4, 5, &c. pour avoir les ſinus de $2'$, $3'$, &c. juſqu'à 3^d, à beaucoup moins d'une unité près.

Pour calculer les ſinus des arcs au-deſſus de $3^d\ 0'$, on fera uſage de ce qui a été dit (286); mais on abrégera conſidérablement le travail en ne calculant les ſinus, par ce principe, que de degrés en degrés ſeulement. Quant aux minutes intermédiaires, on y ſatisfera en prenant la différence des ſinus de deux degrés conſécutifs, & formant cette proportion, *ſoixante minutes ſont au nombre de minutes dont il s'agit, comme la différence des ſinus des deux degrés voiſins eſt à un quatrième terme*, qui ſera ce qu'on doit ajouter au plus petit des deux ſinus, pour avoir le ſinus du nombre de degrés & minutes dont il s'agit. Par exemple, ſi après avoir trouvé que les ſinus de 8^d & de 9^d, ſont 13917 & 15643, je voulois avoir le ſinus de $8^d\ 17'$; je prendrois la différence 1726 de ces ſinus, & je calculerois le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers ſont $60' : 17' :: 1726$:

Ce quatrième terme, qui eſt 489, à très-peu près, étant ajouté à 13917 donne 14406 pour le ſinus de $8^d\ 17'$, tel qu'il eſt dans les tables, à moins d'une unité près.

La raiſon de cette pratique eſt fondée ſur ce que, lorſque l'arc KL (*fig.* 122) eſt petit, comme de 1^d, par exemple, les différences LM, Iu des ſinus LF, IH, ſont à peu près proportionnelles aux différences KL, KI, des arcs correſpondans AL, AI, parce que les triangles KML, KuI pouvant être conſidérés comme rectilignes, ſont ſemblables.

290. Cette méthode ne doit cependant être employée que juſqu'à 87^d. Paſſé ce terme, on ne peut ſe permettre de prendre

iu (*fig* 142) pour la différence des ſinus PB, Qx, parce que la quantité ux, toute petite qu'elle l'eſt, a un rapport ſenſible avec iu, & d'autant plus ſenſible que l'arc AB approche plus de 90^d. Dans ce cas il faut ſe rappeler que (173) les lignes DE, Dt qui ſont les différences entre le rayon & les ſinus PB, Qx ſont proportionnelles aux quarrés des cordes DB & Dx, ou (à cauſe que les arcs DB & Dx ſont fort petits) aux quarrés des arcs DB & Dx; c'eſt pourquoi, ayant calculé le ſinus de 87^d, on prendra ſa différence avec le rayon 100000, & pour trouver le ſinus de tout autre arc entre 87^d & 90^d, on fera cette proportion; le quarré de 3^d ou de 180′, eſt au quarré du nombre des minutes du complément de l'arc en queſtion, comme la différence du rayon au ſinus de 87^d, eſt à un quatrième terme, qui ſera Dt, & qui étant retranché du rayon, donnera Ct ou Qx ſinus de l'arc en queſtion.

Par exemple, ayant trouvé que le ſinus de 87^d eſt 99863, ſi je veux avoir le ſinus de 88^d 24′, dont le complément eſt 1^d 36′ ou 96′, je ferai cette proportion, $180'^{2} : 96'^{2} :: 137 : Dt$, par laquelle je trouve que Dt vaut 39, à très-peu de choſe près; retranchant 39 du rayon 100000, j'ai 99961 pour les ſinus de 88^d 24′, tel qu'il eſt en effet dans les Tables.

291. Ayant calculé ainſi les ſinus, on aura facilement les tangentes & les ſécantes, par ce qui a été dit (281).

292. Les ſinus étant calculés, on calcule leurs logarithmes, comme on calcule ceux des nombres. Il faut pourtant obſerver que ſi l'on prenoit dans les Tables la valeur numérique d'un des ſinus, pour calculer ſon logarithme ſelon ce qui a été dit (*Arith.* 225), on ne trouveroit pas ce logarithme abſolument le même qu'il eſt dans la colonne des logarithmes des ſinus; la raiſon en eſt que les ſinus des tables ont été calculés originairement, dans la ſuppoſition que le rayon étoit de 10000000000 parties; mais comme les calculs ordinaires n'exigent pas une telle préciſion, on a ſupprimé dans les Tables actuelles les cinq derniers chiffres des valeurs numériques des ſinus, tangentes, &c. en ſorte que ces valeurs, telles qu'elles ſont actuellement dans les tables, ne ſont approchées qu'à environ une unité près, ſur 100000. Il n'en a pas été de même des logarithmes des ſinus, tangentes, &c. On les a conſervés tels qu'ils ont été calculés pour le rayon ſuppoſé de 10000000000 parties, & c'eſt pour cette raiſon qu'on leur trouve une caractériſtique beaucoup plus forte que ne ſemble le ſuppoſer la valeur numérique du ſinus correſpondant, ou de la tangente correſpondante, en ſorte

que, lorſqu'on fait uſage des logarithmes des ſinus, tangentes, &c. on calcule dans la ſuppoſition tacite que le rayon ſoit de 10000000000 parties, & lorſqu'on fait uſage des valeurs numériques des ſinus, tangentes, &c. on calcule dans la ſuppoſition que le rayon ſoit de 100000 parties ſeulement.

A l'égard des logarithmes des tangentes & ſécantes, on les a par une ſimple addition & une ſouſtraction, lorſqu'une fois on a ceux des ſinus; cela eſt évident d'après ce qui a été dit (281) & (*Arith.* 216).

293. Quoique les Tables ordinaires ne donnent les ſinus que pour les degrés & minutes, néanmoins on peut en déduire les valeurs de ces mêmes lignes, pour les degrés, minutes & ſecondes, & cela en ſuivant exactement ce que nous venons de preſcrire pour les degrés & minutes ſeulement. Mais comme on emploie plus ſouvent les logarithmes de ces lignes, au lieu de ces lignes elles-mêmes, nous nous arrêterons un moment ſur ce dernier objet.

Suppoſant qu'on ait les logarithmes des ſinus & des tangentes, de minute en minute; quand on voudra avoir le logarithme du ſinus d'un certain nombre de degrés, minutes & ſecondes, on prendra dans les Tables celui du ſinus du nombre des degrés & minutes; on prendra auſſi la différence des deux logarithmes voiſins, qui eſt à côté, & on fera cette proportion: 60 ſecondes ſont au nombre de ſecondes en queſtion, comme la différence des logarithmes, priſe dans les Tables, eſt à un quatrième terme qu'on ajoutera au logarithme du ſinus des degrés & minutes.

Si, au contraire, on avoit un logarithme de ſinus qui ne répondît pas à un nombre exact de degrés & minutes; pour avoir les ſecondes, on feroit cette proportion: La différence des deux logarithmes, entre leſquels tombe le logarithme donné, eſt à la différence entre ce même logarithme & celui qui eſt immédiatement plus petit dans la Table, comme 60 ſecondes ſont à un quatrième terme, qui ſeroit le nombre de ſecondes à ajouter au nombre de degrés & minutes de l'arc qui, dans la Table, eſt immédiatement au-deſſous de celui que l'on cherche.

294. On pourra ſuivre cette règle, tant que l'arc ne ſera pas au-deſſous de 3 degrés; lorſqu'il ſera au-deſſous, on ſe conduira comme dans cet exemple; ſuppoſons qu'on demande le ſinus de $1^d\,55'\,48''$; on feroit cette proportion, $1^d\,55' : 1^d\,55'\,48'' ::$ le ſinus de $1^d\,55'$ eſt à un quatrième terme, qui (à cauſe que les petits arcs ſont proportionnels à leurs ſinus) ſera ſans erreur ſenſible, le ſinus de $1^d\,55'\,48''$. Mais pour calculer plus commodément, on réduira les deux premiers termes en ſecondes;

& alors prenant dans les Tables le logarithme du ſinus de 1d 55′ qui eſt le troiſième terme, on lui ajoutera le logarithme de 1d 55′ 48″ réduits en ſecondes; enfin du total on retranchera le logarithme de 1d 55′ réduits en ſecondes, le reſte (*Arith.* 216) ſera le logarithme du quatrième terme, c'eſt-à-dire, le logarithme cherché.

Réciproquement, pour trouver le nombre de degrés, minutes & ſecondes d'un arc au-deſſous de 3 degrés, & dont on a le ſinus; on chercheroit d'abord dans les Tables, quel eſt le nombre de degrés & minutes; puis on feroit cette proportion: le ſinus du nombre de degrés & minutes trouvés, eſt au ſinus propoſé, comme ce même nombre de degrés & minutes réduits en ſecondes, eſt au nombre total de ſecondes de l'arc cherché; ainſi, par logarithmes, l'opération ſe réduira à prendre la différence entre le logarithme de ſinus propoſé, & celui du ſinus du nombre de degrés & minutes immédiatement au deſſous, & à ajouter ce logarithme, au logarithme de ce nombre de degrés & minutes réduits en ſecondes; la ſomme ſera le logarithme du nombre de ſecondes que vaut l'arc cherché. Par exemple, ſi l'on me donne 8,6233427 pour logarithme du ſinus d'un arc; je trouve dans les Tables, que le nombre de degrés & minutes le plus approchant, eſt 2d 24′, & que la différence entre le logarithme du ſinus propoſé, & celui du ſinus de ce dernier arc, eſt 0013811; j'ajoute cette différence avec 3,9365137, logarithme de 2d 24′ réduits en ſecondes; la ſomme 3,9378948 répond dans les Tables de logarithmes, à 8667; c'eſt le nombre de ſecondes de l'arc cherché, qui par conſéquent eſt de 2d 24′ 27″. Cette règle eſt l'inverſe de la précédente.

295. A l'égard des logarithmes des tangentes, on ſuivra les mêmes règles en changeant le mot de *ſinus* en celui de *tangente*. Il faut ſeulement en excepter les arcs qui ſont entre 87 degrés & 90 degrés, pour leſquels on ſuivra celle-ci. Calculez le logarithme de la tangente du complément, par la règle qu'on vient de preſcrire pour les tangentes, & retranchez ce logarithme du double du logarithme du rayon. En effet, les triangles ſemblables *CBD*, *CFE*, (*fig.* 136), font voir que la tangente eſt le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers ſont, la cotangente, le rayon & le rayon. Et ſi au contraire on avoit le logarithme de tangente d'un arc qui devant être entre 87 degrés & 90 degrés, devroit avoir des ſecondes; on retrancheroit ce logarithme, du double du logarithme du rayon, & on auroit la tangente du complément qui étant néceſſairement entre 0 degrés & 3 degrés, ſe détermineroit facilement

d'après ce qui précède ; prenant le complément de l'arc ainſi trouvé, on auroit l'arc cherché.

296. Puiſque le ſinus d'un arc eſt la moitié de la corde d'un arc double ; ſi l'on deſçendoit par e principe donné (284), juſqu'au ſinus de l'arc le plus approchant d'une ſeconde, & qu'en doublant ce ſinus, pour avoir la corde de 2 ſecondes, on répétât ce double autant de fois que l'arc de 2 ſecondes eſt contenu dans la demi-circonférence, il eſt viſible qu'on auroit un nombre fort approchant de la longueur de la demi-circonférence, mais plus petit ; & ſi par la proportion donnée (282) on calculoit la tangente d'une ſeconde, & que l'ayant doublée, on répétât ce double autant de fois que le double de cet arc eſt contenu dans la demi-circonférence, on trouveroit un nombre fort approchant de la demi-circonférence, mais plus grand ; on peut donc, par le calcul des ſinus, approcher du rapport du diamètre à la circonférence ; en procédant de cette manière, on trouveroit que le rayon étant ſuppoſé de 10000000000, la demi-circonférence ſeroit entre 31415926536 & 31415926535.

Concluons donc de-là que le rayon étant 1, les 180 degrés de la demi-circonférence valent 3,1415926535 ; le degré vaut 0,0174532925 ; la minute vaut 0,0002908882 ; la ſeconde vaut 0,0000048481 ; & ainſi de ſuite.

Du Graphomètre.

297. Avant que d'enſeigner l'uſage des principes précédens, pour la réſolution des triangles, il eſt à propos de faire connoître comment on meſure les angles qui font partie de ces triangles.

L'inſtrument qu'on emploie lorſqu'on veut me-

ſurer les angles avec une préciſion ſuffiſante pour la plupart des pratiques, eſt le *Graphomètre* (*fig.* 145).

C'eſt un demi-cercle de cuivre diviſé en 180°, & ſur lequel on marque même les demi-degrés, ſelon la grandeur de ſon diamètre.

La demi-circonférence *DHB* ſur laquelle les diviſions ſont marquées, n'eſt pas une ſimple ligne: c'eſt une couronne demi-circulaire à laquelle l'ouvrier donne plus ou moins de largeur; & cette couronne eſt ce qu'on appelle le *limbe* de l'inſtrument.

Le diamètre *DB* fait corps avec l'inſtrument; mais le diamètre *EC* qu'on nomme *alidade*, n'y eſt aſſujetti que par le centre *A* autour duquel il peut tourner & parcourir, par ſon extrémité *C*, toutes les diviſions de l'inſtrument. Chacun de ces deux diamètres eſt garni à ſes deux extrémités de *pinnules* à travers leſquelles on regarde les objets. Quelquefois, au lieu de pinnules, chacun de ces deux diamètres porte une lunette. Celle qui répond au diamètre *BD*, eſt parallèle à ce diamètre. L'autre, fixée à l'alidade *EC* peut ſe mouvoir avec elle, & s'incliner un peu ſur elle, afin de n'être pas obligé de déranger le plan de l'inſtrument pour appercevoir les objets qui ſeroient un peu élevés ou abaiſſés à l'égard de ce plan.

L'inſtrument eſt porté ſur un pied, & peut, ſans rien changer à la poſition du pied, être incliné dans tous les ſens, ſelon le beſoin.

Pour rendre le graphomètre propre à meſurer les angles avec plus de préciſion, à indiquer les parties de degré; on fait, le plus ſouvent, ſur la largeur & à l'extrémité du diamètre mobile, des diviſions qui ſelon la manière dont elles correſpondent à celles du limbe, ſervent à connoître les

parties de degré, de 5 en 5 minutes, ou de 4 en 4 minutes, &c.

Pour les faire marquer de 5′ en 5′, par exemple, on prend ſur la largeur & à l'extrémité de l'alidade, une étendue de 11 degrés, & on la diviſe en douze parties égales, dont chacune eſt par conſéquent de 55′. Lorſque la première diviſion de l'alidade correſpond à l'une des diviſions du limbe, alors l'angle compris entre les deux diamètres, eſt meſuré par les diviſions du limbe. Mais lorſque la première diviſion de l'alidade ne s'accorde pas avec une des diviſions du limbe; alors on cherche ſur l'une & ſur l'autre, quelle eſt la diviſion qui approche le plus de ſe correſpondre, & l'on ajoute au nombre de degrés marqués ſur le limbe entre la premiere diviſion de celui-ci, & celle de l'alidade, autant de fois 5 minutes qu'il y a d'intervalles ſur l'alidade entre ſa première diviſion, & celle qui a ſa correſpondante ſur le limbe; parce que pour chaque intervalle il y a 5 minutes de différence entre le limbe & l'alidade.

Si on vouloit évaluer les minutes de 4 en 4, on prendroit un arc de 14 degrés que l'on diviſeroit en quinze parties; & pour évaluer de 3 en 3, on prendroit 19 degrés que l'on diviſeroit en vingt parties.

Pour meſurer un angle, avec cet inſtrument; par exemple, pour meſurer l'angle que formeroient au point *A* (*fig.* 145) les lignes qu'on imagineroit tirées de ce point aux deux objets *G* & *F*; on place le centre du graphomètre en *A*, & on diſpoſe l'inſtrument de manière que regardant à travers les pinnules du diamètre fixe *B D*, l'on apperçoive l'un *F* de ces objets, & qu'en même temps l'autre objet *G* ſe trouve dans le prolongement du plan de l'inſtrument, ce qu'on fait en inclinant plus ou

moins le graphomètre : alors on fait mouvoir l'alidade *E C* juſqu'à ce qu'on puiſſe appercevoir l'objet *G* à travers les pinnules *E* & *C* ; l'arc *B C* compris entre les deux diamètres, eſt la meſure de l'angle *G A F*.

Lorſqu'on veut employer le graphomètre à meſurer des angles dans un plan vertical ; c'eſt-à-dire, des angles formés dans un plan qui paſſe par ce qu'on appelle une ligne *à-plomb* ; on donne au plan de l'inſtrument, la poſition verticale, à l'aide d'un poids ſuſpendu par un fil dont on attache une extrémité au centre du graphomètre. Lorſque le fil raſe le bord de l'inſtrument, & répond à 90°, le graphomètre a la diſpoſition convenable.

De la réſolution des Triangles-rectangles.

298. Nous avons dit ci-deſſus (271), que pour être en état de calculer ou de réſoudre un triangle, il falloit connoître trois des ſix parties qui le compoſent, & que parmi les trois choſes connues, il falloit qu'il y eût au moins un côté. Comme l'angle droit eſt un angle connu, il ſuffit donc dans les triangles rectangles, de connoître deux choſes différentes de l'angle droit ; mais il faut qu'une, au moins, de ces deux choſes, ſoit un côté. Il faut encore remarquer que comme les deux angles aigus d'un triangle-rectangle valent enſemble un angle droit, dès que l'un des deux eſt connu, l'autre l'eſt auſſi.

La réſolution des triangles-rectangles ſe réduit à quatre cas : ou les deux choſes connues ſont un des deux angles aigus, & un côté de l'angle droit ; ou elles ſont un angle aigu & l'hypothénuſe ; ou un côté de l'angle droit & l'hypothénuſe ; ou enfin les deux côtés de l'angle droit.

Si on en excepte le cas où connoiſſant deux côtés, on demanderoit le troiſième ; cas qui n'a pas beſoin d'autre règle que celle qui a été donnée (166) ; ces quatre cas trouveront toujours leur réſolution dans l'une des deux proportions ou analogies ſuivantes.

299. 1°. *Le rayon des Tables, eſt au ſinus d'un des angles aigus, comme l'hypothénuſe eſt au côté oppoſé à cet angle aigu.*

300. 2°. *Le rayon des Tables, eſt à la tangente d'un des angles aigus, comme le côté de l'angle droit adjacent à cet angle, eſt au côté oppoſé à ce même angle.*

Pour démontrer la première de ces deux analogies, il n'y a qu'à ſe repréſenter, (*fig.* 143) que dans le triangle-rectangle CED, la partie CA de l'hypothénuſe ſoit le rayon des tables ; alors en imaginant l'arc AB, la perpendiculaire AP ſera le ſinus de l'angle ACB ou DCE ; or à cauſe des parallèles AP & DE, on aura, dans les triangles ſemblables CAP, CDE, $CA : AP :: CD : DE$, c'eſt-à-dire, R : ſin. $DCE :: CD : DE$, ce qui eſt préciſément la première analogie.

On prouvera de même que R : ſin $CDE :: CD : CE$.

Pour la ſeconde, il faut ſe repréſenter, dans le triangle rectangle CEF (*fig.* 144), que la partie CA du côté CE ſoit le rayon des tables ; & ayant imaginé l'arc AB, la perpendiculaire AD élevée ſur A au point A, ſera la tangente de l'angle C ou FCE ; alors à cauſe des triangles ſemblables CAD, CEF, on aura $CA : AD :: CE : EF$, c'eſt-à-dire, R : tang. $FCE :: CE : EF$, ce qui fait la ſeconde des deux analogies énoncées ci-deſſus.

On prouvera de la même manière, que..... *R* : tang. *CFE* :: *EF* : *CE*.

301. Dans les applications qui vont ſuivre, nous emploierons toujours les logarithmes des ſinus, tangentes, &c. au lieu des ſinus, tangentes, &c. & pour familiariſer les Commençans avec l'uſage des complémens arithmétiques, nous en ferons uſage dans tous les calculs, à l'exception des cas, où le logarithme à retrancher ſeroit celui du rayon, dont la caractériſtique étant 10, la ſouſtraction eſt très-facile.

Après ces obſervations, venons à l'application des deux analogies demontrées ci-deſſus, aux quatre cas dont nous avons parlé.

EXEMPLE I. *Déterminer la hauteur* AC *d'un édifice* (fig. 146), *par des meſures priſes ſur le terrein.*

On s'éloignera de cet édifice à une diſtance *CD*, telle que l'angle compris entre les deux lignes qu'on imaginera menées du point *D* au pied & au ſommet de l'édifice, ne ſoit ni trop aigu ni fort approchant de 90^d; & ayant meſuré cette diſtance *CD*, on fixera au point *D* le pied d'un graphomètre. On diſpoſera cet inſtrument de manière que ſon plan ſoit vertical & dirigé vers l'axe *AC* de la tour, & que ſon diamètre fixe *HF*, ſoit horizontal, ce qui ſe fera à l'aide d'un petit poids ſuſpendu par un fil attaché au centre; ce fil doit alors raſer le bord de l'inſtrument & répondre à 90^d. On fera mouvoir le diamètre mobile juſqu'à ce qu'on puiſſe appercevoir à travers les pinnules ou la lunette dont il eſt garni, le ſommet *A* de l'édifice; alors on obſervera ſur l'inſtrument le nombre des degrés de l'angle *FEC*, qui eſt auſſi celui de ſon oppoſé au ſommet *AEB*.

Cela posé, la hauteur AC de l'édifice, étant perpendiculaire à l'horizon, est perpendiculaire à BE; c'est pourquoi on a un triangle-rectangle ABE, dans lequel, outre l'angle droit, on connoît BE égal à CD qu'on a mesuré, & l'angle AEB; on cherche la valeur de AB; on voit donc que les trois choses connues, & celle que l'on cherche, sont les termes de l'analogie du n°. 300; donc, pour trouver AB, on fera cette proportion, R : tang. AEB : : BE : AB.

Supposons, par exemple, que la distance CD ou BE ait été trouvée de 132 pieds, & l'angle AEB de 48d 54'.

On aura R : tang. 48d 54' : : 132p : AB; de sorte que prenant dans les tables la valeur de la tangente de 48d 54', la multipliant par 132, & divisant ensuite par la valeur du rayon prise dans les tables, on aura le nombre de pieds de AB, auquel ajoutant la hauteur ED de l'instrument, on aura la hauteur cherchée AC.

Mais en opérant par logarithmes, on aura plus facilement & plus promptement, comme il suit,

Log. tang. 48d 54'	10,0·93064
Log. 132	2,1205739
Somme	12,1798803
Log. du rayon	10,0000000
Reste au log. de AB	2,1798803

Qui répond dans les tables à 151,32 à moins d'un centième près; ainsi AB est de 151p & 32 centièmes, ou 151p 3p 10l.

Remarquons, en passant, que le logarithme du rayon ayant 10 pour caractéristique, & des zéros pour ses autres chiffres, on peut, lorsqu'il s'agit de l'ajouter ou de le retrancher, se dispenser de l'écrire, & se contenter d'ajouter ou d'ôter une unité aux dixaines de la caractéristique du logarithme auquel il doit être ajouté, ou dont il doit être retranché.

EXEMPLE II. *BDC* (fig. 147) *eſt l'arrondiſſement de la contreſcarpe, compris entre les prolongemens égaux* AB, AC *des deux faces d'un baſtion; on demande la corde* BC *& la flèche* DE *de cet arrondiſſement, en ſuppoſant connus* AB, AC. *& l'angle* BAC *égal à l'angle flanqué du baſtion.*

Soient *AB* & *AC*, chacun de 20^{T} ou 120^{P}, & l'angle *BAC* de 83^{d} 8$^{\prime}$.

Dans le triangle *BEA*, rectangle en *E*, on aura (299).

1°. *R* : ſin. *BAE* :: *AB* : *BE*.

2°. *R* : ſin. *ABE* ou coſ. *BAE* :: *AB* : *AE*.

Donc 1°.....

Log. *AB* ou log. 120^{P}.....	2,0791812
Log. ſin. *BAE*, ou log. ſin. 41^{d} 34$^{\prime}$.....	9,8218351
Somme moins log. du rayon.....	11,9010163

Qui, dans les tables, répond à 79^{P}, 62; donc la corde BC eſt de 159^{P}, 24.....

2°. Log. 120^{P}.....	2,0791812
Log. coſ. 42^{d} 34$^{\prime}$.....	9,8740085
Somme — log. du rayon.....	11,9531897

Qui répond à 89^{P},78; donc la flèche *BE* ou *AD* — *AE*, eſt de 30^{P},23.

Par la même méthode que nous venons d'employer pour déterminer la corde *DE*, on peut réſoudre, par le calcul, cette autre queſtion.... *Déterminer le vent du boulet dans les pièces d'un calibre connu.*

La méthode graphique que l'on ſuit pour cela, conſiſte à élever à l'extrémité *A* (*fig.* 148) d'une ligne *AB*, égale au diamètre du boulet, une perpendiculaire *AD* égale au rayon *AC*; puis du point *A* comme centre, & du rayon *AD* on décrit l'arc *DCE* qui rencontre en *E*, la circonférence qui a *AB* pour diamètre; on porte la corde *DE*, de *B* en *F*, & *AF* eſt le vent du boulet; c'eſt-à-dire, que *AF* eſt la quantité, dont le diamètre intérieur de la pièce doit être plus grand que celui du boulet.

Pour déterminer *AF* par le calcul, il ne s'agit, en imaginant la corde *AE*, que de calculer *DE* dans le triangle iſoſcèle *DAE*, dont on connoît les côtés *AD*, *AE* égaux chacun au demi diamètre du boulet, & l'angle *DAE* qui (63 & 93) eſt de 150^{d}; en imaginant donc du point *A* une perpendiculaire ſur *DE*, on aura deux triangles-rectangles égaux, par l'un deſquels on calculera, comme dans l'exemple

précédent, la valeur de la demi-corde DE. Doublant & retranchant de la valeur de AB, on aura celle de AF.

Par exemple, pour les pièces de 4, dont le boulet a 3^{po} 6^{l} $3^{pts}\frac{1}{49}$, ou $3^{po},026$; on trouvera DE de $2^{po},923$; le vent du boulet, dans les pièces de ce calibre, eſt donc de $0^{po},103$ ou de 0^{po} 2^{l} $2^{pts}\frac{4}{5}$.

EXEMPLE III. *Le cable ou cordage d'ancre* A C (fig. 149) *étant de* 32^{T} *ou* 192^{p}, *& la profondeur* A B *de la rivière de* 12^{p}, *trouver l'angle* A C B *que fait le cordage avec le lit* B C *de la rivière, ſuppoſé horizontal, & abſtraction faite de la courbure que ce cordage peut prendre tant par l'impulſion de l'eau, que par l'excès de ſon poids ſur celui de l'eau dont il occupe la place.*

On imaginera le triangle-rectangle ABC, dans lequel on connoît AC de 192 pieds, AB de 12 pieds, & l'angle droit B. Et pour trouver l'angle ACB, on fera (199) cette proportion, $AC : AB :: R :$ ſin. ACB.

Donc par logarithmes,

Log. AB	1,0791812
Log. du rayon	10,0000000
Complément arithm. log. AC	7,7166988
Somme	18,7958800

ou log. ſinus de ACB, qui dans les tables répond à 3d 35′.

EXEMPLE IV. *Trouver l'angle que la ligne de mire fait avec l'axe prolongé, dans une pièce d'un calibre & de dimenſions connus.*

Si par le point H (*fig.* 71) le plus élevé du renflement du bourlet, on imagine la droite HI parallèle à l'axe AB ; l'angle GHI ſera égal à l'angle GCA que la ligne de mire fait avec l'axe prolongé. Connoiſſant donc dans le triangle-rectangle GIH, le côté GI & le côté HI, il ſera facile d'avoir l'angle GIH, par cette proportion (300) $IH : GI :: R :$ tang. GHI.

Par exemple, dans la pièce de 12 légère, on a.....

AG de	$6^{po},231$
BH	4,926
& par conſéquent GI	1,305
d'ailleurs HI	77,254

on aura donc 77,254 : 1,305 ou 77254 : 1305 :: R : tang. GHI ; donc par logarithmes,

Log. 1305	3,1156105
Log. du rayon	10,0000000
Complément arith.-log. 77254	5,1120790
Somme	18,2276895

C'eſt le logarithme de la tangente de l'angle cherché, lequel ſera par conſéquent de 0d 58'.

EXEMPLE V. *Une pièce de 12 légère, étant pointée à 3 degrés, trouver la hauteur à laquelle la ligne de mire s'élève à la diſtance de 600 toiſes qui eſt à peu près la portée de cette pièce ſous l'angle de 3 degrés.*

La ligne de mire faiſant avec l'axe, un angle de 58', ainſi qu'on vient de le voir, ne fera donc avec l'horiſon qu'un angle de 2d 2'; ainſi ſa hauteur, à la diſtance horizontale de 600 toiſes, ſera le ſecond côté de l'angle droit dans un triangle rectangle, dont l'angle adjacent au premier côté 600 toiſes, eſt de 2d 2'. On aura donc ce côté (300) par la proportion R : tang. 2d 2' :: 600T eſt à un quatrième terme que l'on trouvera de 21T,3.

EXEMPLE VI. *La première embraſure d'une batterie* AD *à ricochet* (fig. 150) *étant directe, trouver l'inclinaiſon de la ſeptième embraſure; c'eſt-à-dire, l'angle que la ligne du tir fait avec l'épaulement* AC *à la ſeptième embraſure; on ſuppoſe que toutes les pièces de cette batterie ſont dirigées vers un même point* B *éloigné de 250 toiſes ou 1500 pieds.*

La ligne AB du tir de la première embraſure eſt ſuppoſée perpendiculaire à l'épaulement AC; ainſi la queſtion eſt de déterminer l'angle BCA du triangle rectangle BAC dont l'angle A eſt droit, le côté AB eſt de 1500 pieds, & le côté AC eſt déterminé par la grandeur, la diſtance & le nombre des embraſures.

Suppoſons, par exemple, qu'il y ait 20 pieds de diſtance du milieu d'une embraſure au milieu de ſa voiſine; alors on fera cette proportion, 120 : 1500 :: R : tang. BCA. Donc par logarithmes,

Log. 1500	3,1760913
Log. du rayon	10,0000000
Complément arithm.-log. 120	7,9208188
Somme	11,0969101

C'eſt le logarithme de la tangente de l'angle BCA qui eſt donc de 85d 26'.

Comme le heurtoir DF doit toujours être perpendiculaire à la ligne du tir, & qu'il doit être appuyé contre l'épaulement, au moins par une de ſes extrémités, il fait donc avec l'épaulement un angle ADF, qui eſt le complément de celui DCE ou ACB que nous venons de déterminer; ainſi connoiſſant la longueur DF du heurtoir, & par conſéquent ſa moitié DE, il ſera facile de calculer la diſtance CE de l'épaulement, à

laquelle doit être placé, ſur la ligne du tir, le milieu *E* du heurtoir.

Réſolution des Triangles obliquangles.

302. On ſe ſert du terme de *triangles obliquangles*, pour déſigner en général, les triangles qui n'ont point d'angle droit.

303. *Dans tout triangle rectiligne, le ſinus d'un angle, eſt au côté oppoſé à cet angle, comme le ſinus de tout autre angle du même triangle, eſt au côté qui lui eſt oppoſé.*

Car ſi l'on imagine un cercle circonſcrit au triangle *ABC* (*fig.* 151), & qu'ayant tiré les rayons *DA*, *DB*, *DC*, on conçoive que d'un rayon *Db* égal à celui des Tables, on ait décrit le cercle *abc*; qu'enfin on ait tiré les cordes *ab*, *bc*, *ac* qui joignent les points de ſection *a*, *b*, *c*; il eſt facile de voir que le triangle *abc* eſt ſemblable au triangle *ABC*; car les lignes *Da*, *Db* étant égales ſont proportionnelles aux lignes *DA*, *DB*; donc (105) *ab* eſt parallèle à *AB*; on prouvera de même que *bc* eſt parallèle à *BC*, & *ac* parallèle à *AC*; donc (102) $AB : ab :: BC : bc$, ou $AB : \frac{1}{2} ab :: BC : \frac{1}{2} bc$; or la moitié de la corde *ab* eſt (274) le ſinus de *ah* moitié de l'arc *ahb*; & cette moitié de l'arc *ahb* eſt la meſure de l'angle *acb* qui a ſon ſommet à la circonférence, & qui eſt égal à l'angle *ACB*; donc $\frac{1}{2} ab$ eſt le ſinus de l'angle *ACB*; on prouvera de même que $\frac{1}{2} bc$ eſt le ſinus de l'angle *BAC*; donc *AB* : ſin. *ACB* :: *BC* : ſin. *BAC*.

304. Cette propoſition ſert à réſoudre un triangle. 1°. Lorſqu'on connoît deux angles & un côté.

2°.

2°. Lorsqu'on connoît deux côtés & un angle opposé à l'un de ces côtés.

EXEMPLE I. *On veut connoître les distances* CA, CB (fig. 152) *d'une galiote à bombes* C, *à deux batteries de côté* A & B.

Des points *A* & *B* on observera (au même instant, si la galiote *C* est en mouvement) les angles *CAB*, *CBA*; puis on mesurera la distance *AB* des deux batteries *A* & *B*. Alors dans le triangle *CAB* dont on connoît deux angles & un côté, on retranchera de 180 degrés la somme des deux angles connus, pour avoir le troisième; & l'on déterminera *AC* & *CB* par les deux proportions suivantes.

$$\text{sin. } C : AB :: \text{sin. } B : AC$$
$$\text{sin. } C : AB :: \text{sin. } A : BC.$$

Supposons, par exemple, que *AB* ait été trouvé de 256 toises; l'angle *A*, de 84d 14′; l'angle *B*, de 85d 40′; on aura l'angle *C*, de 10d 6′; & pour avoir *AC* & *BC*, on opérera par logarithmes, comme il suit.

Log. sin. *B*....	9,9987567	Log. sin. *A*....	9,9977966
Log. *AB*.....	2,4082400	Log. *AB*.....	2,4082400
Compl. arith. log. sin. *C*.	0,7560528	Compl. arith. log. sin. *C*.	0,7560528
Log. *AC*.....	3,1630495	Log. *CB*.....	3,1620894
Donc *AC*.....	1456 toises.	Donc *CB*.....	1452 toises.

EXEMPLE II. *Connoissant la distance* AC (fig. 153) *d'un point* C *à l'angle flanqué d'un bastion, la distance* AB *des sommets des angles flanqués de deux bastions voisins, ou le côté extérieur du polygone; & ayant observé l'angle* C, *trouver la distance* BC.

Soit le côté extérieur *AB*, de 200 toises; la distance *AC* de 130 toises, & l'angle *C* de 59d 16′. On commencera par calculer l'angle *B* par cette proportion *AB* : sin. *C* :: *AC* : sin. *B*. Opérant donc par logarithmes, on aura

Log. sin. 59d 16′	9,9342737
Log. 130.....	2,1139434
Complément arith.-log. 200.....	7,6989700
Somme.....	19,7471871

C'est le logarithme du sinus de l'angle *B*; mais comme un sinus (279) appartient également à un angle aigu & à l'angle

obtus qui en eſt le ſupplément, & que rien dans l'énoncé de la queſtion ne détermine ſi l'angle *B* doit être aigu ou obtus, on n'eſt pas plus en droit de prendre pour valeur de l'angle *B*, la quantité $33^d\ 58'$ qui répond dans les Tables, au logarithme trouvé, que ſon ſupplément $146^d\ 2'$. Mais ſuppoſons que l'on ſache d'ailleurs que l'angle *B* doit être aigu; alors nous devons prendre $33^d\ 58'$ pour ſa valeur; d'où nous conclurons que l'angle *BAC* eſt de $68^d\ 46$. Ainſi pour avoir le côté *BC*, il ne s'agit donc plus que de faire cette proportion, ſin. *C* : *AB* :: ſin. *BAC* : *BC*; donc

Log. 200.....	2,3010300
Log. ſin. $86^d\ 46'$	9,9993081
Complément arith.-log. ſin. $59^d\ 16'$	0,0657263
Somme.....	12,3660644

C'eſt le logarithme du côté *BC* que l'on trouve par conſéquent de $232^T,4$.

305. *Si l'on connoît la ſomme de deux quantités, & leur différence; on aura la plus grande de ces deux quantités, en ajoutant la moitié de la différence, à la moitié de la ſomme; & la plus petite, en retranchant au contraire, la moitié de la différence, de la moitié de la ſomme.*

Par exemple: ſi je ſais que deux quantités ſont enſemble 57, & qu'elles différent de 17, j'en conclus que ces deux quantités ſont 37 & 20; en ajoutant d'une part la moitié de 17 à la moitié de 57, & retranchant de l'autre part, la moitié de 17, de la moitié de 57.

En effet, puiſque la ſomme comprend la plus grande & la plus petite, ſi à cette ſomme on ajoutoit la différence, elle comprendroit alors le double de la plus grande; donc la plus grande vaut la moitié de ce tout, c'eſt-à-dire, la moitié de la ſomme des deux quantités, plus la moitié de leur différence.

Au contraire, ſi de la ſomme on ôtoit la différence, il reſteroit le double de la plus petite; donc

la plus petite vaudroit la moitié du reſte, c-eſt-à-dire, la moitié de la ſomme, moins la moitié de la différence.

306. *Dans tout triangle rectiligne* ABC (fig. 154 & 155), *ſi de l'un des angles on abaiſſe une perpendiculaire ſur le côté oppoſé; on aura toujours cette proportion : Le côté* AC *ſur lequel tombe, ou ſur le prolongement duquel tombe la perpendiculaire, eſt à la ſomme* AB + BC *des deux autres côtés, comme la différence* AB — BC *de ces mêmes côtés, eſt à la différence des ſegmens* AD & DC, *ou à leur ſomme, ſelon que la perpendiculaire tombe en dedans ou au dehors du triangle.*

Décrivez du point *B* comme centre, & d'un rayon égal au côté *BC*, la circonférence *CEGF*, & prolongez le côté *AB*, juſqu'à ce qu'il la rencontre en *E*. Alors *AE* & *AC* ſont deux ſécantes tirées d'un même point, pris hors du cercle; donc, ſelon ce qui a été dit (123), on aura cette proportion, $AC : AE :: AG : AF$.

Or *AE* eſt égale à $AB + BE$ ou $AB + BC$; *AG* eſt égale à $AB - BG$ ou $AB - BC$; & *AF* eſt (*fig.* 154) égale à $AD - DF$ ou (53) à $AD - DC$; donc $AC : AB + BC :: AB - BC : AD - DC$. Dans la *figure* 155, *AF* eſt égale à $AD + DF$ ou $AD + DC$; on a donc, dans ce cas, $AC : AB + BC :: AB - BC : AD + DC$.

307. Donc lorſqu'on connoît les trois côtés d'un triangle, on peut, par cette propoſition, connoître les ſegmens formés par la perpendiculaire menée d'un des angles, ſur le côté oppoſé; car alors on connoît (*fig.* 154) la ſomme *AC* de

ces *ſegmens*, & la proportion qu'on vient d'enſeigner, *fait* connoître leur différence, puiſqu'alors *les trois* premiers termes de cette proportion ſont *connus* : on connoîtra donc chacun des ſegmens, par ce qui a été dit (305). Dans la *figure* 155, on connoît la différence des ſegmens AD & CD, qui eſt le côté même AC, & la proportion détermine la valeur de leur ſomme.

308. Il eſt aiſé, d'après cela, de réſoudre cette queſtion : *Connoiſſant les trois côtés d'un triangle, déterminer les angles.*

On imaginera une perpendiculaire abaiſſée de l'un de ces angles, ce qui donnera deux triangles rectangles ADB, CDB.

On calculera par la propoſition précédente, l'un des ſegmens, DC, par exemple ; & alors dans le triangle rectangle CDB, connoiſſant deux côtés BC & CD, outre l'angle droit, on calculera facilement l'angle C, par ce qui a été dit (299).

EXEMPLE. Le côté AB eſt de 142 pieds, le côté BC de 64, & le côté AC de 184, on demande l'angle C.

Je calcule la différence des deux ſegmens AD & DC, par cette proportion, $184 : 142 + 64 :: 142 - 64 : AD - DC$, ou $184 : 206 :: 78 : AD - DC$ que je trouve valoir 87,32 ; donc (305) le petit ſegment CD vaut la moitié de 184, moins la moitié de 87,41 ; c'eſt-à-dire, qu'il vaut 48,34.

Cela poſé, dans le triangle rectangle CDB, je cherche l'angle CBD, qui étant une fois connu, fera connoître l'angle C, & pour trouver cet angle CBD, je fais cette proportion (299), $BC : CD :: R :$ ſin. GBD, c'eſt-à-dire, $64 : 48,34 :: R :$ ſin. CBD.

Opérant par logarithme,

Log. de 48,34.....	1,6843066
Log. du rayon.....	1.....
Complément arithm. du log. de 64.....	8,1938200
Somme ou log. ſin. CBD.....	9,8781266

Qui, dans les Tables, répond à 49d 3' ; donc l'angle C eſt de 40d 57'.

309. *Dans tout triangle rectiligne, la ſomme de deux côtés, eſt à leur différence, comme la tangente de la moitié de la ſomme des deux angles oppoſés à ces côtés, eſt à la tangente de la moitié de leur différence.*

Car ſelon ce qui a été dit (303) on a (*fig.* 156) AB : ſin. C : : AC : ſin. B; donc (97) $AB + AC : AB - AC$: : ſin. C + ſin B : ſin. C — ſin. B; or (288) ſin. C + ſin. B : ſin. C — ſin. B : : tang. $\frac{C+B}{2}$: tang. $\frac{C-B}{2}$; donc $AB + AC : AB - AC$: : tang. $\frac{C+B}{2}$: tang. $\frac{C-B}{2}$.

310. Cette propoſition ſert à *réſoudre un triangle, dont on connoît deux côtés & l'angle compris.* Car ſi l'on connoît l'angle A, par exemple, on connoît auſſi la ſomme des deux angles B & C, en retranchant l'angle A de 180 degrés. Donc en prenant la moitié du reſte qu'on aura par cette ſouſtraction, & cherchant ſa tangente dans les Tables, on aura, avec les deux côtés AB & AC ſuppoſés connus, trois termes de connus dans la proportion qu'on vient de démontrer; on pourra donc calculer le quatrième, qui fera connoître la moitié de la différence des deux angles B & C. Alors connoiſſant la demi-ſomme & la demi-différence de ces angles, on aura (305) le plus grand, en ajoutant la demi-différence à la demi-ſomme; & le plus petit, en retranchant, au contraire, la demi-différence, de la demi-ſomme. Enfin ces deux angles étant connus, on aura aiſément le troiſième côté, par la propoſition enſeignée (303).

Exemple. Suppoſons que le côté AB ſoit de 141 pieds, le côté AC de 120, & l'angle A de 48 degrés; on demande les deux angles C & B & le côté BC.

Je retranche 48 degrés de 180 degrés, & il me reste 132 degrés pour la somme des deux angles C & B, & par conséquent 66 degrés pour leur demi-forme.

Je fais cette proportion, 142 + 120 ; 142 — 120 : : tang. 66^d : tang. $\frac{C-B}{2}$.

Ou 262 : 22 : : tang. 66^d : tang. $\frac{C-B}{2}$.

Et opérant par logarithmes,

Log. tang. 66 degrés.....	10,3514169
Log. 22.....	1,3424227
Complément arithm. du log. de 262.....	7,5816987
Somme ou log. tang. de la demi-différ...	19,2755383

Qui, dans la Table, répond à 10^d 41$'$.

Ajoutant cette demi-différence à la demi-somme 66^d, & la retranchant de cette même demi-somme, j'aurai, comme on le voit ici,

66^d 0$'$	66^d 0$'$
10^d 41$'$	10^d 41$'$
L'angle C..... 76^d 41$'$.	L'angle B.... 55^d 19$'$

Enfin, pour avoir le côté BC, je fais cette proportion : *sin.* C : AB : : *sin.* A : BC ; c'est-à-dire, *sin.* 76^d 41$'$; 142^p : : *sin.* 48^d : BC.

Opérant comme dans les exemples ci-dessus, on trouvera que BC vaut 108^p, 4.

311. Tels sont les moyens qu'on peut employer pour la résolution des triangles : voici maintenant quelques exemples de l'application qu'on peut en faire aux figures plus composées.

312. Supposons que C & D (fig. 157) *sont deux objets dont on ne peut approcher, mais dont on a cependant besoin de connoître la distance.*

On mesurera une base AB, des extrémités de laquelle on puisse appercevoir les deux objets C & D. On observera au point A les angles CAB, DAB, que font, avec la ligne AB, les lignes AC, AD, qu'on imaginera aller du point A aux

deux objets C & D; on observera de même au point B, les angles CBA, DBA.

Cela posé, on connoît dans le triangle CBA, les deux angles CAB, CBA & le côté AB; on pourra donc calculer le côté AC, par ce qui a été dit (303). Pareillement dans le triangle ADB, on connoît les deux angles DAB, DBA & le côté AB; ainsi, on pourra, par le même principe, calculer le côté AD; alors, en imaginant la ligne CD, on aura un triangle CAD, dans lequel on connoît les deux côtés AC, AD qu'on vient de calculer, & l'angle compris CAD; car cet angle est la différence des deux angles mesurés CAB, DAB; on pourra donc calculer le côté CD (310).

313. On peut aussi, par ce même moyen, savoir quelle est la direction de CD, quoiqu'on ne puisse approcher de cette ligne, car, dans le même triangle CAD, on peut calculer l'angle ACD que CD fait avec AC; or si par le point C on imagine une ligne CZ parallèle à AB, on sait que l'angle ACZ est supplément à CAB, à cause des parallèles (40); donc, prenant la différence de l'angle connu ACZ, à l'angle calculé ACD, on aura l'angle DCZ que CD fait avec CZ ou avec sa parallèle AB; & comme il est fort aisé d'orienter AB, on aura donc aussi la direction de CD.

314. Nous avons dit, en parlant des lignes, que nous donnerions le moyen de *déterminer différens points d'un même alignement, lorsque des obstacles empêchent de voir les extrémités l'une de l'autre*: voici comment on peut s'y prendre.

On choisira un point C (*fig.* 158.) hors de la ligne AB dont il s'agit, & qui soit telle qu'on puisse, de ce point, appercevoir les deux extrémités A & B; on mesurera les distances AC & CB, soit immédiatement, soit en formant des triangles dont ces lignes deviennent côtés, & qu'on puisse calculer comme dans l'exemple précédent.

Alors dans le triangle ACB, on connoîtra les deux côtés AC & CB, & l'angle compris ACB; on pourra donc (310) calculer l'angle BAC.

Cela posé, on fera planter selon telle direction CD qu'on voudra, plusieurs piquets, & ayant mesuré l'angle ACD, on connoîtra dans le triangle ACD le côté AC & les deux angles A & ACD; on pourra donc (304) calculer le côté CD; alors on continuera de faire planter des piquets dans la direction CD, jusqu'à ce qu'on ait parcouru une longueur égale à celle qu'on a calculée, & le point D où l'on s'arrêtera sera dans l'alignement des deux points A & B.

315. *S'il n'étoit pas poſſible de trouver un point C duquel on put appercevoir à la fois les deux points A & B, on pourroit ſe retourner de la manière ſuivante.*

On chercheroit un point *C* (*fig.* 159) d'où l'on pût appercevoir le point *B*, & un autre point *E* d'où l'on pût voir le point *A* & le point *C*. Alors meſurant ou déterminant, par quelque expédient tiré des principes précédens, les diſtances *AE*, *EC* & *CB*, on obſerveroit au point *E* l'angle *AEC*, & au point *C* l'angle *ECB*. Cela poſé dans le triangle *AEC*, connoiſſant les deux côtés *AE*, *EC*, & l'angle compris *AEC*, on calculeroit par ce qui a été dit (310) le côté *AC* & l'angle *ECA*; retranchant l'angle *ECA* de l'angle obſervé *ECB*, on auroit l'angle *ACB*; & comme on vient de calculer *AC*, & qu'on a meſuré *CB*, on retomberoit dans le cas précédent, comme ſi les deux points *A* & *B* euſſent été viſibles du point *C*; on achevera donc de la même manière.

316. D'après ces méthodes & l'inſpection de la *figure* 160 : il eſt facile de voir comment on s'y prendroit pour établir une batterie ſur le prolongement de la courtine *AB*.

317. *Meſurer une hauteur dont le pied eſt inacceſſible; comme ſeroit la hauteur d'une montagne* (fig. 161).

On meſurera ſur le terrein une baſe *FG* des extrémités de laquelle on puiſſe appercevoir le point *A* dont on veut connoître la hauteur; enſuite avec le graphomètre, dont *BF* & *CG* repréſentent la hauteur, on meſurera les angles *ABC*, *ACB*, que font avec la baſe *BC*, les lignes *BA*, *CA*, qu'on imagine aller des deux points *B* & *C* au point *A*; enfin à l'une des ſtations, en C, par exemple, on diſpoſera l'inſtrument comme on l'a fait dans l'exemple relatif à la *fig.* 146, & on meſurera l'angle *ACD*, qui eſt l'inclinaiſon de la ligne *AC*, à l'égard de l'horizon; alors connoiſſant dans le triangle *ACB*, les deux angles *ABC*, *ACB*, & le côté *BC*, il ſera facile (304) de calculer le côté *AC*; & dans le triangle *ADC*, où l'on connoît maintenant le côté *AC*, l'angle meſuré *ACD*, & l'angle *D* qui eſt droit, puiſque *AD* eſt la hauteur perpendiculaire, il ſera facile de calculer *AD*, & on aura la hauteur du point *A* au-deſſus du point *C*. Si l'on veut ſavoir enſuite quelle eſt la hauteur du point *A*, au-deſſus du point *B*, ou de tout autre point environnant, il ne s'agira plus que de niveller ou de trouver la différence de hauteur entre les points *C* & *B*; c'eſt ce dont nous parlerons ci-après.

318. A, B, C (*fig.* 162) *ſont trois points connus; c'eſt-à-*

dire, dont les distances & les angles que forment ces distances, sont connus; on veut établir une batterie hors de ces trois points, mais de manière que du point D *où elle sera placée, on voie* AB *sous un angle connu, &* BC *sous un angle connu. On demande la position du point* D.

On imaginera un cercle, dont la circonférence passe par les trois points *A*, *C* & *D*; puis concevant la droite *DBF*, on imaginera les deux cordes *AF* & *CF*.

Dans le triangle *AFC* on connoît *AC*, l'angle *FAC* égal à *FDC*, & l'angle *FCA* égal à *FDA*; on pourra donc calculer *FC* & *FA* (304).

Dans le triangle *FBC*, on connoît *FC*, *BC*, & l'angle *FCB*, composé de *FCA*, égal à *FDA*, & de *ACB* connu; on pourra donc (310) calculer l'angle *CBF*, dont le supplément est *CBD*.

Alors dans le triangle *CBD*, où l'on connoît *CB*, l'angle *CBD* & l'angle *BDC*, il sera facile de calculer *DC*. On s'y prendra de même pour calculer *AD*, par le moyen des triangles *AFC*, *ABF* & *ABD*.

Si la somme des deux angles observés *ADB*, *BDC*, étoit égale à l'angle *ABC*, ou à son supplément, le problême seroit indéterminé, ou susceptible d'une infinité de solutions, le point *B* se trouveroit alors sur la circonférence.

319. Parmi les exemples que les commençans peuvent prendre pour s'exercer aux calculs trigonométriques, nous croyons devoir leur indiquer le calcul des lignes & des angles d'un front de fortification régulière; par exemple, dans un pentagone construit selon le premier système de M. de Vauban.

Nous supposerons le côté extérieur *AB* (*fig. 163*) de 180 toises; la perpendiculaire *CD* de 30 toises; les faces de bastion *EA*, *BF*, de 50 toises. La largeur *AG* du fossé, vis-à-vis de l'angle flanqué, ou le rayon de l'arrondissement de la contrescarpe, de 18 toises; la capitale *HI* de la demi-lune, de 55 toises; la distance *ET* de l'angle de l'épaule, à la rencontre *T* de la face *QI* de la demi-lune, trois toises.

Alors le triangle *ACD*, rectangle en *C*, dans lequel on connoît *AC* & *CD*, fera connoître les angles *DAC*, *ADC*, par ce qui a été dit (300), & le côté *AD*, par ce qui a été dit (166); l'angle *DAC* étant connu, on aura ses égaux *DBC*, *ELK*, *FKL*; & du même angle *DAC*, comparé à la moitié de l'angle intérieur du pentagone, on conclura la moitié de l'angle flanqué *VAE*.

AD & *AE* étant connus, on aura *DE* & son égale *DF*; ainsi dans le triangle *ADF*, où l'on connoît *AD* & *DF*, & l'angle *ADF*, double de *ADC*, on calculera (310) les angles

DFA, *DAF*, & le côté *AF*; & comme dans cette conſtruction le triangle *AFL* eſt iſocèle, par le moyen du triangle *LAF*, on aura facilement les deux angles *ALF* & *AFL*. Ajoutant au premier de ces deux angles, l'angle *KLE* égal à *DAC*, on aura l'angle *KLF* de la courtine. Et retranchant de l'angle *AFL*, l'angle calculé *AFD*, on aura *KFL*, dont le ſupplément *LFB* eſt l'angle de l'épaule.

Si de *AL* égal à *AF* calculé, on retranche *AD*, on aura *DL*; & les triangles ſemblables *ADB*, *KDL*, donneront *KL* ou la courtine.

Dans le triangle *KLF* dont tous les angles ſont connus, & le côté *KL*, on aura aiſément *KF* & *LF* (304).

De *KF* retranchant *FD*, on aura *KD*; & dans le triangle rectangle *KMD* où l'on connoît *KD* & *KM*, on aura *MD* (166). On connoîtra donc *MC*.

Dans le triangle *AOC* (en imaginant que *O* eſt le centre du polygone), on connoît *AC* & les angles; on calculera donc facilement *AO* & *OC* (299 & 300).

Dans le triangle rectangle *AGF*, où l'on connoît *AF* & *AG*, on calculera *FAG* (299) qui étant ajouté à *FAD* & à *DAO* actuellement connus, donnera le ſupplément de *GAN*.

On aura donc *GAN* & ſon complément *ANG* ou *ONH*; d'où, par le triangle *ONH*, dont l'angle *NOH* eſt connu, il ſera facile de conclure l'angle *NHO*, & par conſéquent ſon ſupplément *QHI*.

Dans le triangle rectangle *NAG*, il ſera donc facile de calculer *AN*; ce qui donnera *ON* dans le triangle *ONH*, où les angles étant d'ailleurs connus, on pourra calculer *OH*. On aura donc *CH*, & comme on connoît *HI*, on aura *CI*. Ajoutant *CI* à *CD*, on aura *DI* dans le triangle *TDI*, où l'on connoît d'ailleurs *DT* ou *DE* + *ET*, & l'angle *TDI*; on pourra donc (310) calculer l'angle *DIT* ou *HIQ* du triangle *HIQ* dont on connoit actuellement *HI* & l'angle *QHI*. D'où il ſera facile de calculer dans ce triangle *QHI*, la demi-gorge *QH*, & la face *QI* de la demi-lune *QIP*.

Uſages de la Trigonométrie pour lever & tracer les Plans.

319. L'art de tracer les plans conſiſte à déterminer ſur le papier, des points qui ſoient placés entr'eux, comme le ſont, ſur le terrein, les objets que ces points doivent repréſenter. On ſuppoſe alors que

tous les objets dont il s'agit ſont ſitués dans un même plan horizontal ; mais s'ils n'y étoient pas, en ſorte que les opérations qu'on aura faites pour déterminer les ſituations reſpectives de ces objets, n'euſſent pas été faites toutes dans un même plan horizontal, ou à peu près, il faudroit avant que de tracer le plan, ramener ces obſervations à ce qu'elles auroient été, ſi on les eût faites dans un plan horizontal. Nous allons d'abord expliquer comment on doit s'y prendre quand les obſervations ont été faites dans un plan horizontal, ou y ont été réduites ; nous ferons voir enſuite comment on les y réduit.

Soient donc $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K$, (*fig.* 163), pluſieurs objets remarquables, dont on veut repréſenter les poſitions reſpectives ſur un plan.

On deſſinera groſſièrement, ſur un papier, ces objets, dans les poſitions qu'on leur juge à l'œil ; & pour cet effet, on ſe tranſportera aux différens lieux où il ſera néceſſaire, pour prendre une connoiſſance légère de tous ces objets : ce premier deſſin qu'on appelle un *croquis* ou *brouillon*, ſervira à marquer les différentes meſures qu'on prendra dans le cours des opérations.

On meſurera une baſe AB, dont la longueur ne ſoit pas trop diſproportionnée à la diſtance des objets les plus éloignés qu'on peut voir de ſes extrémités, & qui ſoit telle, en même-temps, que de ces mêmes extrémités on puiſſe appercevoir le plus grand nombre d'objets que faire ſe pourra ; alors avec le graphomètre on meſurera au point A les angles EAB, FAB, GAB, CAB, DAB, que font au point A, avec la baſe AB ; les lignes qu'on imaginera menées de ce point aux objets E, F, G, C, D, qu'on ſuppoſe pouvoir

être apperçus des extrémités *A* & *B* de la baſe : on meſurera de même, au point *B*, les angles *EBA*, *FBA*, *GBA*, *CBA*, *DBA*, que font en ce point, avec la ligne *AB*, les lignes qu'on imaginera menées de ce même point *B*, aux mêmes objets que ci-deſſus.

S'il y a des objets, comme *H*, *I*, qu'on n'ait pas pu voir des deux extrémités *A* & *B*, on ſe tranſportera en deux des lieux *E* & *F* qu'on vient d'obſerver, & d'où l'on puiſſe voir ces objets *H* & *I*; alors regardant *EF* comme une baſe, on meſurera les angles *HEF*, *IEF*, *HFE*, *IFE*, que font avec cette nouvelle baſe, les lignes qui iroient de ſes extrémités aux deux objets *H* & *I*. Enfin, s'il y a quelqu'autre objet, comme *K*, qu'on n'ait pu voir, ni des extrémités de *AB*, ni de celles de *EF*, on prendra encore pour baſe quelqu'autre ligne, comme *FG*, qui joint deux des points obſervés, & on meſurera de même, à ſes deux extrémités, les angles *KFG*, *KGF*.

Cela poſé, dans les triangles *ACB*, *ADB*, *AEB*, *AFB*, *AGB*, dans chacun deſquels on connoît le côté *AB*, & les deux angles adjacens à ce côté, il ſera facile (304) de calculer les deux autres côtés.

A l'égard des triangles *HEF*, *IEF*, comme on n'y a meſuré que les angles ſur *EF*, on commencera par calculer *EF*, à l'aide du triangle *EAF*, dans lequel on connoît l'angle *EAF*, différence des deux angles obſervés *EAB*, *FAB*, & les côtés *AE*, *AF*, qu'aura donnés le calcul précédent : il ſera donc facile d'avoir *EF*, par ce qui a été dit (310); alors dans chacun des triangles *HEF*, *IEF*, on connoîtra le côté *EF*, & les deux angles adjacens; on calculera les deux autres côtés, comme il vient d'être dit pour les premiers;

on ſe conduira de même pour le triangle *KFG*.

Ces calculs étant faits, on tirera (*fig.* 164) ſur le papier, une ligne *ab*, que l'on fera d'autant de parties de l'échelle qui doit déterminer la grandeur que l'on veut donner au plan, d'autant de parties, dis-je, qu'on a trouvé de toiſes ou de pieds dans *AB*; puis pour déterminer l'un quelconque des points que l'on a pu voir des extrémités *A* & *B* de la baſe, le point *E*, par exemple, on prendra ſur l'échelle autant de parties que le calcul a donné de toiſes ou de pieds pour *AE*, & du point *a*, comme centre, & d'un rayon *ae*, égal à ce nombre de parties, on décrira un arc. On prendra pareillement ſur l'échelle autant de parties, qu'on a trouvé de toiſes ou de pieds dans *BE*, & du point *b*, comme centre, & d'un rayon égal à ce nombre de parties, on décrira un arc qui coupe celui qui a été décrit du rayon *ae*, en un point *e*, lequel repréſentera ſur le papier, la poſition du point *e* à l'égard de *ab*, ſemblable à celle de *E*, à l'égard de *AB*; car, par cette conſtruction, le triangle *aeb* a les côtés proportionnels à ceux du triangle *AEB*; il lui eſt donc ſemblable : on s'y prendra de même pour déterminer les points *f*, *g*, *c*, *d*, qui doivent être la repréſentation des points *F*, *G*, *C*, *D*.

A l'égard des points *h*, *i*, k, qui doivent être la repréſentation des objets *H*, *I*, *K*, qui n'ont pu être apperçus des points *A* & *B*; les points *e*, *f*, *g*, ayant été déterminés comme il vient d'être dit, les lignes *ef*, & *fg*, ſerviront de baſe, comme *ab* en a ſervi pour *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, ; en ſorte que l'opération ſe réduira de même à tracer des points *e* & *f*, comme centres, & des rayons *he*, *hf*, qui contiennent autant de parties de l'échelle, que *HE* & *HF* ont été trouvés (par

le calcul) contenir de toiſes ou de pieds; à tracer, dis-je, deux arcs dont l'interſection *h* marquera le point *H*; & ainſi des autres. Alors la figure tracée ſur le papier ſera ſemblable au terrein que l'on a levé (128), puiſqu'elle ſera compoſée d'un même nombre de triangles que celui-ci, ſemblables à ceux de ce dernier, & ſemblablement diſpoſés; il ne s'agira plus que de deſſiner, à chacun de ces points, les objets qu'on y aura remarqués; & on remplira les parties intermédiaires, qui demandent moins de ſcrupule, par les moyens dont nous parlerons plus bas.

Il faut obſerver encore, que cette méthode devant être employée pour fixer les points principaux & fondamentaux du plan, il eſt à propos d'employer un graphomètre à lunettes, plutôt qu'un graphomètre à pinnules.

De la manière de réduire les Angles obſervés dans des plans inclinés à l'horizon, à ceux qu'on obſerveroit ſi les objets étoient dans un plan horizontal.

320. Lorſque, dans les opérations précédentes, les objets ne ſont pas tous ſitués dans un même plan horizontal, il faut avant que de former le plan qui doit les repréſenter, réduire les angles, à ce qu'ils auroient été obſervés ſi tous les objets euſſent été dans un même plan horizontal: voici comment cela peut s'exécuter.

Soient *A*, *B*, *C* (*fig.* 165) trois points différemment élevés au-deſſus de l'horizon, & dont les hauteurs reſpectives ſoient *AD*, *BF*, *CE*; en ſorte que *FDE* ſoit un plan horizontal: on a meſuré l'angle *BAC*; mais comme le plan ſur lequel on

veut rapporter ces objets, eſt *FDE*, on imagine que *B* eſt placé en *F*, *A* en *D*, & *C* en *E*; & l'on demande l'angle *FDE*.

A la ſtation qu'on ſera pour meſurer l'angle *BAC*, on meſurera auſſi les angles *BAD*, *CAD*, que font les rayons viſuels *AB*, *AC*, avec le fil-à-plomb au point *A*; ce que l'on fera, comme il a été expliqué dans l'exemple relatif à la *fig.* 146 *page* 15.

Cela poſé, concevons que *AB* & *AC* prolongés, s'il eſt néceſſaire, rencontrent le plan horizontal *FDE*, au point *G* & *I*; dans les triangles *ADG*, *ADI*, rectangles en *D*, ſi on regarde *AD* comme le rayon des tables, *DG* & *DI* ſeront les tangentes des angles obſervés *GAD*, *IAD*; & *AG*, *AI* en ſeront les ſécantes; donc, ſi on prend dans les tables, les ſécantes & les tangentes des angles *GAD* & *IAD*, on connoîtra 1°. dans le triangle *GAI*, les côtés *GA* & *AI*, & l'angle obſervé *GAI*; on pourra donc, par ce qui a été dit (310), calculer le côté *GI*. 2°. Dans le triangle *GDI*, on connoîtra les côtés *GD* & *DI*, & le côté *GI* que l'on vient de calculer; on pourra donc, par ce qui a été dit (308), calculer l'angle *GDI*.

On s'y prendroit d'une manière ſemblable pour réduire l'angle obſervé au point *B*; & lorſque dans un triangle on aura réduit deux angles, il ſera inutile de faire un ſemblable calcul pour réduire le troiſième, parce que les trois angles du triangle réduit, ne pouvant valoir que 180^{d}, le troiſième ſera toujours facile à avoir.

Ayant ainſi réduit les angles, il ſera facile de réduire les diſtances, ou l'une d'entr'elles, (car il ſuffit d'en réduire une pour chaque triangle). En effet, ſi on imagine l'horizontale *BO*, dans le triangle *BAO*, rectangle en *O*, on connoît *BA* qui a été meſuré, l'angle droit & l'angle *BAO*;

on aura donc (299) facilement *BO* ou *FD*.

EXEMPLE.

On a trouvé l'angle *BAC* de 62d 37′; l'angle *BAD* de 88d 5′, & l'angle *CAD* de 78d 17′.

Je cherche dans les tables, les ſécantes & les tangentes des angles *BAD* & *CAD*, & je trouve, comme il ſuit, en négligeant les trois dernières décimales.

Séc.	88d	5′	ou *AG*	29,90
Séc.	78d	17	ou *AI*	4,92
Tang.	88d	5	ou *DG*	29,88
Tang.	78d	17	ou *DI*	4,82

Alors, dans le triangle *AGI*, je calcule (310) la demi-différence des deux angles *AGI*, *AIG*, par cette proportion *AG* + *AI* : *AG* — *AI* : : tang. 58d 41′, demi-ſomme de ces deux angles, eſt à un quatrième terme; je trouve donc que cette demi-différence eſt 49d 42′, ce qui donne l'angle *AGI*, de 8d 59′; d'où (304), on trouvera *GI* de 27,98.

Connoiſſant les trois côtés *DG*, *DI*, *GI*, on trouvera (308) que l'angle *GDI* eſt de 62d 27′.

Si les tables dont on fait uſage ne contenoient pas les ſécantes, on les auroit néanmoins facilement par le principe donné (282).

Des Méthodes par leſquelles on ſupplée à la Trigonométrie, dans l'art de lever les Plans.

321. L'uſage du calcul trigonométrique, dans l'art de lever les plans, n'eſt indiſpenſable, que lorſque les points principaux de l'eſpace dont on veut former la carte, ſont à des diſtances aſſez conſidérables les uns des autres.

Mais lorſque les diſtances ſont médiocres, après avoir meſuré une baſe, & obſervé les angles, comme il vient d'être dit (319), au lieu de calculer les triangles, pour former, à l'aide des côtés calculés & réduits à l'échelle du plan, des triangles ſemblales à ceux qu'on a obſervés ſur le terrein, on ſe contente de former ces triangles ſemblables par le moyen

moyen des angles obſervés, ainſi que nous allons le dire.

Cette méthode eſt moins exacte que la précédente, en ce que le rapporteur ou en général l'inſtrument que l'on emploie pour former ſur le papier des angles égaux à ceux qu'on a obſervés ſur le terrein, ne pouvant être que d'un aſſez petit rayon, on ne peut apporter dans la formation de ces angles, la même préciſion qu'on peut apporter en meſurant ſur l'échelle la valeur que le calcul a déterminée pour les côtés.

Mais comme il eſt peu ordinaire qu'on ait beſoin d'une exactitude auſſi ſcrupuleuſe, & que d'ailleurs la méthode de rapporter les angles ſur le papier eſt beaucoup plus expéditive, cette dernière doit être regardée comme étant d'un uſage fort étendu & ſuffiſamment exact. Elle conſiſte à tirer (*fig.* 164) une ligne *ab* qui contienne autant de parties de l'échelle du plan, qu'on a trouvé de meſures dans la baſe *AB*. Puis aux extrémités *a*, *b*, on fait les angles *eab*, *eba*, *fab*, *fba*, &c. égaux aux angles obſervés *EAB*, *EBA*, *FAB*, *FBA*, &c. que font avec la baſe *AB*, les objets que l'on a pu voir des points *A*, *B*. Puis joignant les points *e*, *f* par la droite *ef*, on forme aux extrémités de cette ligne comme baſe, des angles égaux à ceux qu'on a obſervés des deux points *E* & *F*. Et ainſi de ſuite.

322. On peut auſſi ſe diſpenſer du calcul trigonométrique pour réduire à des angles horizontaux, ceux qu'on auroit obſervés dans des plans inclinés à l'horizon. En voici la méthode.

Les mêmes obſervations étant ſuppoſées qu'au n° 320 pour la *fig.* 165; au point *A* (*fig.* 166) de la ligne quelconque *AD*, on fera les angles *DAG*, *DAI* égaux aux angles verticaux obſervés

DAG & *DAI* de la *figure* 165 ; au point quelconque *D fig.* 166, on élèvera ſur *AD* la perpendiculaire indéfinie *IDG*. Au point *A* on mènera la ligne *AM* faiſant avec *AI* l'angle *IAM* égal à l'angle *BAC* qu'il s'agit de réduire ; & ayant fait *AM* égale à *AG*, on tirera *IM*. Puis du point *I* comme centre, & du rayon *IM*, du point *D* comme centre, & du rayon *DG*, on décrira deux arcs qui ſe coupent en *O* ; l'angle *IDO* ſera l'angle demandé.

De la Bouſſole & de ſon uſage pour lever les parties de détail d'un plan.

323. La principale pièce de la bouſſole (*fig.* 167) eſt une aiguille aimantée ſoutenue en ſon milieu par un pivot ſur lequel elle a toute la mobilité poſſible. Cette aiguille eſt renfermée dans une boîte de cuivre ou de bois. Sur le bord intérieur de cette boîte on marque les 360 degrés ; & vers le bord extérieur & aux diviſions 180 degrés & 360 degrés, ou parallèlement à la ligne qui paſſe par ces deux diviſions, on place deux pinnules qui forment enſemble ce qu'on appelle la *viſière*.

324. L'uſage de la bouſſole eſt fondé ſur la propriété qu'a l'aiguille aimantée de reſter conſtamment dans une même poſition, ou d'y revenir quand elle en a été écartée (du moins dans un même lieu, & pendant un aſſez long intervalle de temps). D'où il ſuit que ſi on fait tourner la boîte de la bouſſole, on pourra juger de la quantité dont elle a tourné, en comparant le point de la graduation auquel l'aiguille répondra, à celui auquel elle répondoit d'abord.

325. On applique aſſez ordinairement une bouſ-

ſole au graphomètre ; non dans la vue de ſuppléer au graphomètre, mais pour *orienter* les objets, c'eſt-à-dire pour connoître, à environ un demi-degré, leur poſition à l'égard des quatre *points cardinaux* ou à l'égard de la ligne *nord* & *ſud* avec laquelle l'aiguille aimantée fait conſtamment le même angle dans un même lieu, du moins pendant le cours d'environ une année.

326. La bouſſole eſt employée aux mêmes uſages que le graphomètre, c'eſt-à-dire, à la meſure des angles ; mais pluſieurs raiſons ne permettant pas de donner beaucoup de longueur à l'aiguille, les degrés de la graduation occupent trop peu d'étendue ſur l'inſtrument, pour qu'on puiſſe meſurer les angles avec autant de préciſion qu'avec le graphomètre : c'eſt ce qui fait qu'on n'emploie la bouſſole que pour déterminer les points de détail d'un plan ou d'une carte dont les points principaux ont été fixés par les moyens précédemment décrits.

327. Suppoſons donc qu'il s'agit de lever le cours d'une rivière, par exemple ; on plantera des piquets aux coudes les plus ſenſibles *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* (*fig.* 168) ; & ayant placé la bouſſole au point *A*, en ſorte que la viſière ſoit dirigée le long de *AB*, on obſervera ſur la graduation, quel eſt le nombre de degrés compris entre la ligne *AB*, & la direction actuelle de l'aiguille ; puis on meſurera *AB*. On établira enſuite la bouſſole au point *B* ; on dirigera de même la viſière le long de *BC*, & l'on obſervera de même l'angle que *BC* forme avec *BN*, direction de l'aiguille, qui eſt parallèle à la première direction *AN* : on meſurera *BC*, & on fera pareilles opérations à chaque détour ; ayant ainſi meſuré tous les angles

& toutes les diſtances, on les rapportera ſur le papier de la manière ſuivante.

On prendra arbitrairement le point *a*, (*fig.* 169) qui doit repréſenter le point *A*, & l'on mènera arbitrairement la ligne *a n*, pour repréſenter la direction de l'aiguille aimantée. Au point *a*, on fera à l'aide du rapporteur, l'angle *n a b* égal à l'angle obſervé *N A B*; & on donnera à *a b* autant de parties de l'échelle du plan, qu'on a trouvé de meſures pour *A B*. Au point *b*; on mènera *b n* parallèle à *a n*, & l'on fera l'angle *n b c* égal à l'angle obſervé *N B C*, & on donnera à *b c* autant de parties de l'échelle, qu'on a trouvé de meſures pour *B C*. On continuera de même pour tous les autres points, après quoi on figurera les parties intermédiaires à peu près, telles qu'on les a jugées à la vue.

Ce que nous diſons des détours d'une rivière, s'applique évidemment aux détours d'un chemin, à l'enceinte d'un bois, au contour d'un marais, &c.

De la Planchette & de ſon uſage pour lever les Plans.

328. Il y a encore une autre manière de lever, qui eſt d'autant plus commode, qu'elle exige peu d'appareil, & qu'en même-temps qu'on obſerve les différens points dont on veut avoir les poſitions, on les trace ſur le plan ſans les perdre de vue. L'inſtrument qu'on emploie à cet effet, eſt repréſenté par la *fig.* 170. *A B C D*, eſt une planche de 16 à 18 pouces de long, & à peu près de pareille largeur, portée ſur un pied comme le graphomètre. Sur cette planche on étend une feuille de papier, qu'on arrête par le moyen d'un chaſſis qui entoure la planche. *L M* eſt une règle garnie de pinnules

placés à ſes deux extrémités & dans un alignement parallèle au bord de la règle.

Lorſqu'on veut faire uſage de cet inſtrument, qu'on appelle *planchette*, pour tracer le plan d'une campagne ; on prend une baſe *m n*, comme dans les opérations ci-deſſus ; & poſant le pied de l'inſtrument en *m*, on fait planter un piquet en *n*. On applique la règle *L M* ſur le papier, & on la dirige de manière à voir le piquet placé en *n*, à travers des deux pinnules ; alors on tire le long de la règle, une ligne *E F* à laquelle on donne autant de parties de l'échelle du plan, qu'on aura trouvé de meſures entre le point *E*, d'où l'on obſerve d'abord, & le point *f*, d'où l'on obſervera à la ſeconde ſtation. On fait enſuite tourner la règle autour du point *E*, juſqu'à ce qu'on rencontre, en regardant au travers des pinnules, quelqu'un des objets *I*, *H*, *G* ; & à meſure qu'on en rencontre un, on tire le long de la règle une ligne indéfinie. Ayant ainſi parcouru tous les objets qu'on peut voir lorſqu'on eſt en *m*, on tranſporte l'inſtrument en *n*, & on laiſſe un piquet en *m* ; alors on fait au point *n* les mêmes opérations à l'égard des objets *I*, *H*, *G*, qu'on a faites à l'autre ſtation. Les lignes *f i*, *f h*, *f g*, qui dans ce ſecond cas vont, ou ſont imaginées aller à ces objets, rencontrent les premières aux points *g*, *h*, *i*, qui ſont la repréſentation des objets *G*, *H*, *I*.

329. La planchette s'emploie principalement pour lever les détails d'un pays dont les points principaux ont déjà été déterminés exactement par les moyens ci-deſſus, & rapportés enſuite ſur le papier ; ou pour ajouter à une carte déjà conſtruite, des objets dont la poſition auroit été omiſe.

Par exemple, ſuppoſant que *A*, *B*, *C*, (*fig.* 171)

ſont des points qui ont été déjà déterminés & marqués ſur la carte en *a*, *b*, *c*; que *D* ſoit un point dont la poſition eſt inconnue : voici comment avec la planchette on déterminera ſa poſition *d*. On établira la planchette au point *D*, & on l'orientera de la manière qui va être expliquée ci-deſſous; alors on dirigera l'alidade dans l'alignement *A a*, & enſuite dans l'alignement *B b*, & traçant une ligne le long de l'alidade, dans chaque alignement, la rencontre *d* marquera ſur la carte, la poſition du point *D* à l'égard des objets *A*, *B*, *C*. On verifiera cette poſition en dirigeant l'alidade ſuivant *C c*, & obſervant ſi cette ligne prolongée paſſe par le point *d*.

330. On marque ordinairement ſur la carte, la direction de l'aiguille aimantée; & pour cet effet on emploie une bouſſole de figure rectangulaire, telle qu'on voit (*fig.* 172), dont la largeur eſt environ le tiers de la longueur; dans le milieu du fond eſt gravée une ligne parallèle au long côté de la boîte; c'eſt ſur cette ligne qu'eſt placé le pivot qui porte l'aiguille.

Pour marquer ſur le plan la direction de l'aiguille aimantée, on établit l'alidade de la planchette dans l'alignement de deux objets marqués ſur ce plan, & de manière que la repréſentation de ces objets ſur le plan, ſoit ſur ce même alignement; alors on place la bouſſole ſur la planchette, & on la tourne juſqu'à ce que l'aiguille s'arrête dans la ligne nord & ſud de la boîte; c'eſt-à-dire, dans la ligne du milieu du fond de la boîte; enfin on trace une ligne ſelon la direction du long côté de la boîte; c'eſt la direction de l'aiguille.

331. Réciproquement, lorſque la direction de l'aiguille eſt marquée ſur la carte, & qu'on veut

donner à la carte ou à la planchette, la même disposition qu'ont les objets sur le terrein ; il ne s'agit que de faire convenir la ligne nord & sud de la carte, avec la ligne nord & sud de la bousſole.

332. Au lieu de déterminer la position des objets par deux stations, comme nous l'avons expliqué ci-dessus pour la *figure* 170, on se contente souvent d'une seule station, mais alors on mesure pour chaque objet la distance de la planchette à cet objet, & on la rapporte en parties de l'échelle du plan, le long de la règle dirigée sur cet objet.

Du Quart-de-cercle.

333. Quoique le quart-de-cercle dont il s'agit ici, n'ait aucun rapport avec la Trigonométrie, ni avec l'art de lever les plans ; nous n'en placerons pas moins ici la description parmi les instrumens qui servent à la mesure des angles.

On appelle *quart-de-cercle* dans l'Artillerie, tout instrument propre à faire connoître le degré d'inclinaison des bouches à feu, quoique quelques-uns de ces instrumens ne soient composés que d'un arc de 45 degrés.

Celui dont on a fait le plus d'usage, est le quart-de-cercle *ACD*, *fig.* 173, qui, outre ses deux rayons ou règles *CA*, *CD*, & son limbe *AD*, divisé en 90 parties, porte une règle *AB* perpendiculaire à l'extrémité du rayon *CA* ; au centre *C* est attaché un fil qui porte le plomb *I*, dont nous allons voir l'usage.

334. Lorsqu'on veut mesurer l'inclinaison d'un

mortier, avec ce quart-de-cercle, on lui donne l'une ou l'autre des deux diſpoſitions, repréſentées par les *fig.* 174 & 175; dans la première (*fig.* 174), la règle *AB* eſt appliquée ſur la coupe du mortier, & dans la ſeconde (*fig.* 175), elle eſt placée ſur la plate-bande, & parallèlement à l'axe; dans l'une & dans l'autre, on s'aſſure que le plan du quart-de cercle, eſt vertical, lorſque le fil-à-plomb *CI* ne fait que raſer le limbe de l'inſtrument.

Dans la *figure* 174 l'inclinaiſon du mortier eſt meſurée par l'angle *DCI* ou l'arc *DI*, compris entre le fil-à-plomb & le rayon *CD*, parallèle à la règle *AB*, parce que cette inclinaiſon eſt le complément de l'angle, que l'axe du mortier, ou ſa parallèle *CA*, fait avec la verticale ou *CI*.

Dans la *figure* 175, l'inclinaiſon du mortier eſt meſurée par l'angle *ACI* que fait le fil-à-plomb avec le rayon *CA* perpendiculaire à la règle *AB*.

335. Les *figures* 176 & 177 repréſentent le même inſtrument réduit à 45^{d}. Dans la poſition indiquée par la *figure* 176, on ne peut meſurer que les inclinaiſons au-deſſous de 45^{d}; & la poſition indiquée par la *figure* 177, ne peut ſervir que pour celles qui ſont au-deſſus de 45 degrés.

Dans la *figure* 176, l'angle *ACI* meſure l'inclinaiſon du mortier; & dans la *figure* 177 l'inclinaiſon eſt meſurée par le complément de *ACI*.

336. La *figure* 178 repréſente l'inſtrument que l'on emploie pour meſurer l'inclinaiſon de l'axe des pièces de canon.

AB eſt une règle de fer, large d'environ 15 lignes, épaiſſe de 4, & de 3 à 4 pieds de lon-

gueur. A ſon extrémité *B* eſt fixé un plateau de fer *BE*, auquel, & ſur ſon bord, la règle *AB* eſt perpendiculaire. Ce plateau, de même épaiſſeur que la règle, eſt circulaire, & d'un diamètre un peu moindre que celui de la pièce. Il eſt percé en ſon milieu d'un trou, pour donner paſſage à l'air quand on l'introduit dans le canon.

L'autre extrémité *A* de la règle *AB*, porte fixement un ſecteur circulaire de cuivre, d'environ 15 pouces de rayon, dont le limbe *CD* eſt diviſé en degrés & demi-degrés. La graduation commence à l'extrémité *C* du rayon *AC* perpendiculaire à la règle, & s'étend juſqu'à 45^d de *C* vers *D*; & ſeulement juſqu'à 4 ou 5 degrés à l'oppoſite. Du centre, pend un fil ou un cheveu chargé d'un plomb, renfermé dans un garde-filet, pour le mettre à l'abri du vent. Ce garde-filet eſt une boîte de cuivre longue & étroite, mobile autour du centre *A*; il eſt percé vers le bas d'un petit trou, dont l'ouverture eſt garnie d'un verre ou d'une loupe, pour mieux reconnoître la diviſion du limbe qui répond au fil. Le fond de ce garde-filet peut auſſi loger un petit vaſe rempli d'eau, dans laquelle on fait plonger le plomb, afin d'arrêter ſes vibrations.

Cet inſtrument n'eſt pas deſtiné pour la guerre; mais on l'emploie utilement pour des expériences qui demandent de la préciſion.

Du Nivellement.

337. Pluſieurs obſervations démontrent que la ſurface de la terre n'eſt point plane, comme elle le paroît, mais courbe, & même ſphérique, ou à très-peu de choſe près, ſphérique. Lorſqu'un Vaiſſeau commence à découvrir une côte, les premiers

à la *fig.* 146 ; on obſervera l'angle *BCD*, & ayant meſuré la diſtance *CD* ou *CI* à l'aide d'une chaîne qu'on tend horizontalement, & à diverſes repriſes, au-deſſus du terrein *AVB*, on pourra, dans le triangle *CDB*, conſidéré comme rectangle en *D*, calculer *BD*, auquel on ajoutera la hauteur *CA* de l'inſtrument, & la différence *DI* de niveau, calculée par ce qui vient d'être dit (338 & 339).

Mais comme cette manière d'opérer ſuppoſe une grande exactitude dans la meſure de l'angle *BCD* & un inſtrument bien exact, on préfère ſouvent d'aller au même but, par une voie plus longue, que nous allons décrire.

Du Niveau d'eau & de ſon uſage.

342. *CABD* (*fig.* 181) repréſente un des inſtrumens dont on fait uſage pour niveller ; c'eſt celui qu'on appelle *niveau d'eau.*

Il conſiſte en un tuyau creux de fer-blanc ou d'un autre métal, coudé en *A* & *B*. Dans les deux parties éminentes *AC*, *BD*, on fait entrer deux tuyaux de verre *I* & *K*, maſtiqués avec les parties *AC*, *BD*. Au milieu & par-deſſous le tuyau *AB*, eſt attachée une virole pour placer ce tuyau ſur un pied. On remplit d'eau tout le canal juſqu'à ce qu'elle s'élève dans les deux tuyaux de verre, à 2 ou 3 pouces de hauteur. La ligne *CD* où ſe termine la ſuperficie de l'eau dans les deux tuyaux *IA*, *KB*, eſt une ligne horizontale.

L'uſage de cet inſtrument exige une autre pièce que l'on appelle la *mire*. C'eſt un carton ou une feuille de fer-blanc (*fig.* 182), d'environ un pied en quarré, partagé en deux également par une ligne horizontale *MN* qui ſépare la partie inférieure noircie, de la partie ſupérieure qui reſte blanche.

On attache ce carton ſur une règle de manière que *MN* ſoit perpendiculaire à la longueur de la règle. Celle-ci doit entrer à couliſſe dans une rainure le long d'une double toiſe *OP*, diviſée en pieds, pouces & lignes ; la règle, en parcourant ainſi la rainure, permet de porter la ligne de mire où il en eſt beſoin, & de l'y fixer.

343. Pour faire uſage de ce niveau, on le place à diſtances à peu près égales des deux points dont on veut avoir la différence de niveau. Il n'eſt pas néceſſaire que ce ſoit dans l'alignement de ces deux points. On poſe la mire ſucceſſivement à chacun de ces points, de manière que la double toiſe ſoit verticale. On hauſſe ou baiſſe la mire *MN*, juſqu'à ce que l'obſervateur, qui eſt au niveau *CABD*, apperçoive la ligne *MN* dans le prolongement de la ligne *CD* ; alors la différence de hauteur de la mire *MN*, dans chacune des deux poſitions, ſera la différence de niveau des deux points dont il s'agit.

Si l'on trouve, par exemple, qu'à l'un de ces points la ligne de mire *MN* a été élevée juſqu'à $4^{p}\ 8^{po}$, & qu'à l'autre elle ait été élevée juſqu'à $3^{p}\ 9^{po}$, on en conclura que la différence de niveau de ces deux points eſt de 11 pouces.

On s'y prendra de même pour tous les autres points qui ſeront à peu près à la même diſtance de la même ſtation, qui pourront en être apperçus, & dont la différence de niveau avec *CD* n'excèdera pas celle que l'on peut meſurer avec la double toiſe *OP*.

344. Mais lorſque les autres objets ſeront trop éloignés, ou que la différence de niveau ſera trop grande, on prendra à la ſeconde ſtation l'un des

points qu'on a nivellé à la première, afin d'y comparer les autres, & l'on ſe placera autant qu'on le pourra en un lieu qui ſoit à peu près également éloigné de ce point & des autres.

345. Si on ne pouvoit pas ſe placer à diſtances égales, ou à peu près égales des points qu'on veut niveller, alors la différence de niveau entre deux points quelconques ne ſeroit pas exprimée par la différence des hauteurs de la ligne de mire, à chaque point; parce que la différence du niveau vrai au niveau apparent n'eſt la même qu'à des diſtances égales; c'eſt pourquoi il faudroit, de la hauteur obſervée pour chaque point, retrancher la *correction du niveau*; c'eſt-à-dire, la différence du niveau vrai au niveau apparent.

Par exemple, ſi la mire eſt placée à 250 toiſes ou 1500 pieds, & que l'on ait trouvé $4^{p}\ 8^{po}$ pour la hauteur de la ligne de mire, au lieu de $4^{p}\ 8^{po}$ on ne comptera que $4^{p}\ 7^{po}\ 4^{l}$, en retranchant 8 lignes qui eſt la correction du niveau trouvé par ce qui a été dit (338 & 339).

346. Pour donner quelqu'application, nous ſuppoſerons qu'il ſoit queſtion de *lever & tracer le profil d'un ouvrage de fortification* AGHIOP (fig. 183).

On imaginera cet ouvrage coupé par un plan vertical $A\,A'\,P'\,P$, dans lequel on concevra à une hauteur arbitraire $A\,A'$, une ligne horizontale $A'\,P'$.

De tous les angles A, B, C, D, E, &c. on imaginera les verticales $A\,A'$, $B\,B'$, $C\,C'$, $D\,D'$, $E\,E'$, &c. on meſurera immédiatement les diſtances horizontales qui ſéparent ces verticales.

A l'égard des diſtances verticales, on placera le niveau ſur le terre-plein $B\,C$ du rempart, & la mire ſucceſſivement à chacun des angles A, B, C, D, E, pour déterminer les hauteurs $A\,a$, $B\,b$, $C\,c$, $D\,d$, $E\,e$; & ayant retranché la première, de la hauteur $A\,A'$ de la ligne arbitraire $A'\,P'$, on ajoutera les autres au reſte $A'\,a$, & l'on aura les verticales $B'\,B'$, $C'\,C$, &c. juſqu'en E.

On placera enſuite le niveau ſur le parapet, & la mire ſucceſſivement aux points E, F, G, pour avoir les différences de niveau Ee', Ff, Gg. On retranchera la première de EE', & ajoutant les autres, au reſte, on aura les verticales FF', GG'.

On ſe conduira de la même manière pour la partie $KLMNOP$, en plaçant le niveau ſur le glacis.

A l'égard de la partie $GHIK$; comme les points H & I ſont trop bas pour qu'on puiſſe faire uſage de la double toiſe; le moyen le plus ſimple eſt de ſuſpendre un poids à un cordeau, attaché au bout d'une perche, que l'on poſera horizontalement en G & en K, de manière que ce poids deſcende aux pieds H de l'eſcarpe, & I de la contreſcarpe, & de meſurer la longueur du cordeau dans chaque poſition. On ajoutera la première à GG', & la ſeconde à KK', pour avoir HH' & II'.

Toutes ces diſtances, tant horizontales que verticales, étant ainſi meſurées, on formera facilement le profil, en tirant ſur le papier une ligne pour repréſenter $A'P'$; portant ſucceſſivement ſur cette ligne des nombres de parties de l'échelle, égaux aux nombres de meſures trouvées pour les diſtances horizontales, & élevant à l'extrémité de chacune une perpendiculaire, à laquelle on donne autant de parties de l'échelle qu'on a trouvé de meſures pour la diſtance verticale correſpondante.

Joignant les extrémités de ces verticales, on a le profil demandé.

347. Si l'on trouvoit quelque difficulté à meſurer les diſtances horizontales; par exemple, pour le talut intérieur AB, on meſureroit la longueur abſolue de ce talut; & le triangle-rectangle AQB, dont on connoît AB par la meſure actuelle, & QB par le nivellement, donneroit AQ (166).

348. Le nivellement a encore d'autres uſages; nous ne les parcourrons pas ici, mais nous nous en occuperons dans le Traité de pratique qui terminera ce Cours. Nous y ferons connoître auſſi quelques autres eſpèces de niveau.

TABLE DES DIFFÉRENTES MESURES.

MESURES des Surfaces.

Caractères.

Toiſe-quarrée	TT
Pied de toiſe-quarrée ou toiſe-pied	TP
Pouce de toiſe-quarrée ou toiſe-pouce	Tp
Ligne de toiſe-quarrée ou toiſe-ligne	Tl
Point de toiſe-quarrée ou toiſe-point	Tpt
Prime de toiſe-quarrée ou toiſe-prime	T'

Subdiviſions.

					T'
				1 Tpt	12
			1 Tl	12	144
		1 Tp	12	144	1728
	1 TP	12	144	1728	20736
1 TT	6	72	864	10368	124416

Pied-quarré	PP
Pouce de pied-quarré ou pied-pouce	Pp
Ligne de pied-quarré ou pied-ligne	Pl
Point de pied-quarré ou pied-point	Ppt
Prime de pied-quarré ou pied-prime	P'

				P'
			1 Ppt	12
		1 Pl	12	144
	1 Pp	12	144	1728
1 PP	12	144	1728	20736

Mesures des Solides.

Toise-cube..... TTT
Pied de toise-cube ou toise-toise-pied..... TTP
Pouce de toise-cube ou toise-toise-pouce..... TTp
Ligne de toise-cube ou toise-toise-ligne..... TTl
Point de toise-cube ou toise-toise-point..... TTpt
Prime de toise-cube ou toise-toise-prime..... TT'

					TT'
				1 TTpt	12
			1 TTl	12	144
		1 TTp	12	144	1728
	1 TTP	12	144	1728	20736
1 TTT	6	72	864	10368	124416

Pied-cube..... PPP
Pouce de pied-cube ou pied pied-pouce..... PPp
Ligne de pied-cube ou pied-pied-ligne..... PPl
Point de pied-cube ou pied-pied-point..... PPpt
Prime de pied-cube ou pied-pied-prime..... PP't

				1 PP'
			1 PPpt	12
		1 PPl	12	144
	1 PPp	12	144	1728
1 PPP	12	144	1728	20736

Solive..... S
Pied de ſolive..... SP
Pouce de ſolive..... Sp
Ligne de ſolive..... Sl
Point de ſolive..... Spt

					1 Spt
				1 Sl	12
			1 Sp	12	144
		1 SP	12	144	1728
	1 PPP	2	24	288	3456
1 Solive	3	6	72	864	10368

CIRCONFÉRENCE du Cercle.

Circonférence	Circ.
Degré	d
Minute	′
Seconde	″
Tierce	‴

				Tierces
			1 seconde	60
		1 minute	60	3600
	1 degré	60	3600	216000
Circonfér.	360	21600	1296000	77760000

Rapport du diam. à la circonférence, { suiv. Archimède :: 7 : 22 ; suiv. Métius :: 113 : 355

Le même rapport, approché à moins d'un $\frac{1}{100000000^{e}}$ près 1 : 3,14159265

Valeur de l'arc de $\left\{\begin{matrix} 1^{d}\ 0{,}01745329 \\ 1'\ 0{,}00029089 \\ 1''\ 0{,}00000485 \end{matrix}\right\}$ le rayon étant 1.

Logarithme du rapport de la circonfér. au diamètre, ... 0,4971499.

MESURES itinéraires.

Le degré terreſtre	57030 toiſes
Diamètre de la Terre	65335157
La lieue de 25 au degré	2281
La lieue marine ou de 20 au degré	2851,$\frac{1}{2}$
La grande lieue d'Allemag. de 15 au degré	3802
La lieue commune d'Allemagne	3333
La petite lieue d'Allemag. $=\frac{4}{5}$ de la grande	3042
Le mille de Flandre	3221
Le mille de France, d'Angleterre & d'Italie	950$\frac{1}{2}$
Le ſtade	85

FIN.

TABLE
DES PRINCIPES
DE L'ARITHMÉTIQUE.

LA quantité eſt tout ce qui eſt ſuſceptible d'augmentation ou de diminution, numéro 1.

L'arithmétique eſt la ſcience des nombres, n. 2.

L'unité eſt le terme de comparaiſon de toutes les quantités de même eſpèce, n. 4.

Le nombre exprime combien il y a d'unités ou de parties d'unité dans une quantité, n. 5.

Le nombre abſtrait eſt celui qui n'eſt appliqué à aucune eſpèce déterminée, n. 6.

Le nombre concret eſt toujours appliqué à quelqu'eſpèce de choſe, n. 6.

La numération eſt l'art d'énoncer & de repréſenter les nombres, n. 7.

La numération actuelle eſt fondée ſur ce principe de convention, que ſi pluſieurs chiffres ſont rangés ſur une même ligne, les unités repréſentées par chacun de ces chiffres, valent dix fois plus que celles du chiffre à la droite, & dix fois moins que celles du chiffre à ſa gauche, n. 15.

Les nombres incomplexes ne ſe rapportent qu'à une ſeule eſpèce d'unité, n. 18.

Les nombres complexes expriment des quantités dont les parties ſont comparées à différentes unités, n. 18.

Les décimales ſont des parties de dix en dix fois plus petites que l'unité; on les exprime par des chiffres placés à la droite des unités, & ſéparés d'elles par une virgule, n. 21.

Un nombre devient dix fois plus grand ou plus petit, à meſure que la virgule avance ou recule d'un rang vers la droite ou vers la gauche, n. 28.

L'addition eſt une opération par laquelle on exprime, par un ſeul nombre, la valeur totale de pluſieurs nombres de même eſpèce, n. 32.

La ſouſtraction eſt une opération par laquelle on trouve le reſte, l'excès ou la différence de deux nombres de même eſpèce, n. 34.

La multiplication eſt une opération par laquelle on répète un nombre autant de fois

qu'il y a d'unités dans un autre, n. 40.

Le nombre que l'on répète s'appelle *multiplicande*; celui qui indique combien de fois on le répète, ſe nomme *multiplicateur*, & l'on appelle *produit* le réſultat de la multiplication, n. 41.

On appelle *facteurs* les nombres que l'on multiplie l'un par l'autre, n. 42.

La multiplication eſt une addition réitérée du multiplicande, autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, n. 43.

Le produit eſt toujours de même nature que le multiplicande, n. 47.

Dans la multiplication des parties décimales, le produit doit avoir autant de chiffres décimaux qu'il y en a en tout dans les deux facteurs, n. 54.

La diviſion eſt une opération par laquelle on cherche combien de fois un nombre eſt contenu dans un autre, n. 58.

Le nombre qu'on diviſe s'appelle *dividende*; celui par lequel on diviſe, *diviſeur*, & celui qu'on trouve, *quotient*, n. 58.

Le dividende eſt toujours égal au produit d'une multiplication dont le diviſeur & le quotient ſeroient facteurs, n. 58.

La nature des unités du quotient ne peut, en général, être déterminée que par l'état de la queſtion qui donne lieu à la diviſion, n. 59.

La diviſion des parties décimales ſe réduit à celle des nombres entiers, en obſervant de rendre les mêmes, le nombre des décimales du dividende, & celui des décimales du diviſeur, n. 65.

On appelle *fraction* une ou pluſieurs parties de l'unité partagée en un nombre quelconque de parties égales, n. 74.

Une fraction eſt exprimée par deux nombres, dont l'un marque en combien de parties égales l'unité eſt partagée; il s'appelle *dénominateur*; & l'autre marque combien il entre de ces parties dans la valeur de la fraction; on le nomme *numérateur*, n. 76.

Le numérateur & le dénominateur s'appellent les *deux termes de la fraction*, n. 78.

Une expreſſion fractionnaire, dont le numérateur eſt plus grand que le dénominateur, vaut plus que l'unité, n. 79.

Lorſqu'une expreſſion fractionnaire vaut plus que l'unité, on trouve ſa valeur en diviſant le numérateur par le dénominateur, n. 80.

On réduit un nombre entier en fraction d'une eſpèce déterminée, en le multipliant par le dénominateur de cette fraction, n. 80.

On ne change point la valeur d'une fraction quand on en multiplie ou diviſe les deux termes par un même nombre, n. 81 & 82.

Par ce principe on rend raiſon

de la réduction de pluſieurs fractions au même dénominateur, & de la réduction des fractions à leur plus ſimple expreſſion, n. 83, 84 & 86.

Un nombre premier eſt celui qui n'a d'autre diviſeur que l'unité ou lui-même, n. 87.

Une fraction peut être conſidérée comme le quotient d'une diviſion dont le numérateur ſeroit le dividende, & le dénominateur ſeroit le diviſeur, n. 89.

Une fraction peut être réduite en décimales, en diviſant le numérateur (ſuivi d'autant de zéros qu'on veut avoir de décimales) par le dénominateur, n. 92.

Pour additionner les fractions & les retrancher l'une de l'autre, il faut préalablement les réduire au même dénominateur, puis on ajoute ou l'on retranche les numérateurs, & l'on donne à la ſomme ou à la différence le dénominateur commun, n. 94 & 95.

Pour multiplier une fraction par une autre fraction, il faut multiplier numérateur par numérateur, & dénominateur par dénominateur, n. 97.

Pour diviſer une fraction par une autre, il faut la multiplier par la fraction diviſeur renverſée, n. 101.

Evaluer une fraction, c'eſt en chercher la valeur en ſous-eſpèces de l'unité principale dont elle fait partie, n. 104.

Une fraction de fraction eſt égale au produit de toutes les fractions qui entrent dans ſon expreſſion, n. 108.

L'addition & la ſouſtraction des nombres complexes ne diffèrent de celles des nombres incomplexes que par les différentes ſubdiviſions de l'unité, n. 110 & 111.

Un nombre eſt partie aliquote d'un autre, ou bien eſt ſous-multiple de cet autre, quand il y eſt exactement contenu, n. 113.

Dans la multiplication des nombres complexes, on conſidère les ſous-eſpèces comme des fractions, l'une à l'égard de l'autre, & à l'égard de l'unité principale, n. 115.

Dans la diviſion des nombres complexes, il faut toujours rendre le diviſeur incomplexe, n. 122 & ſuiv.

Le quarré d'un nombre eſt le produit de ce nombre multiplié par lui-même, n. 123.

La racine d'un quarré eſt le nombre, qui multiplié par lui-même, a produit ce quarré, n. 124.

Lorſqu'un nombre n'eſt pas un quarré parfait, ſa racine eſt appellée *ſourde, irrationnelle ou incommenſurable*, n. 126.

Le quarré d'un nombre, compoſé de dixaines & d'unités, contient *le quarré des dixaines, le double produit des dixaines par les unités, & le quarré des unités*, n. 127.

Sur ce principe eſt fondé

l'extraction de la racine quarrée d'un nombre composé de plus de deux chiffres, n. 129 & ſuiv.

Pour approcher de la racine quarrée d'un nombre qui n'eſt pas un quarré parfait, on met à la ſuite de ce nombre, deux fois autant de zéros que l'on veut de décimales à la racine, n. 133.

Pour extraire la racine quarrée d'une fraction, on tire la racine du numérateur & celle du dénominateur, ſi les deux termes de la fraction ſont des quarrés parfaits; ſinon, on réduit la fraction en décimales d'un nombre pair de chiffres décimaux, & on extrait enſuite la racine, n. 135 & ſuiv.

Le cube d'un nombre eſt le produit de ce nombre, multiplié par ſon quarré, n. 140.

La racine cubique d'un cube eſt le nombre qui, multiplié par ſon quarré, produit ce cube, n. 142.

Le cube d'un nombre compoſé de dixaines & d'unités, contient le cube des dixaines, trois fois le quarré des dixaines multiplié par les unités, trois fois les dixaines multipliées par le quarré des unités & le cube des unités, n. 145.

Sur ce principe eſt fondée l'extraction de la racine cubique d'un nombre compoſé de plus de trois chiffres, n. 146.

On approche de la racine cubique d'un nombre, qui n'eſt pas un cube parfait, en mettant à la ſuite de ce nombre trois fois autant de zéros qu'on veut de déçimales à ſa racine, n. 147.

Pour extraire la racine cubique d'une fraction, on tire la racine cubique du numérateur & celle du dénominateur, n. 148 & ſuiv.

La raiſon ou le rapport eſt le réſultat de la comparaiſon de deux quantités, n. 152.

Le rapport arithmétique conſiſte dans la différence des deux quantités comparées, n. 153.

Le rapport géométrique conſiſte dans le nombre de fois qu'une quantité en contient une autre, n. 154.

Un rapport arithmétique ne change point, quand on ajoute à ſes deux termes, ou quand on en retranche une même quantité, n. 159.

Un rapport géométrique ne change point quand on multiplie ou quand on diviſe ſes deux termes par un même nombre, n. 160.

Quatre quantités ſont en proportion quand le rapport des deux premières eſt égal au rapport des deux dernières. La proportion eſt arithmétique ou géométrique ſelon la nature des rapports qui la compoſent, n. 162.

La proportion continue, eſt celle dont les termes moyens ſont égaux entr'eux, n. 164.

Dans toute proportion arithmétique, la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens, n. 166.

Dans une proportion arithmétique continue, la ſomme des extrêmes eſt double du terme moyen, n. 167.

Dans une proportion géométrique, le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens, n. 168.

Et ſi la proportion eſt continue, le produit des extrêmes eſt égal au quarré du terme moyen, n. 168.

Le quatrième terme d'une proportion géométrique eſt égal au produit du ſecond par le troiſième diviſé par le premier, n. 169.

Si quatre quantités ſont telles que le produit des extrêmes ſoit égal à celui des moyens, ces quatre quantités ſont en proportion, n. 170.

Si quatre quantités ſont en proportion, elles y ſeront encore ſi on met les extrêmes à la place des moyens, & les moyens à la place des extrêmes; ou ſi l'on échange les places des moyens, ou celles des extrêmes, n. 171 & 172.

On peut multiplier ou diviſer par un même nombre les deux antécédens ou les deux conſéquens, ſans troubler la proportion, n. 173.

Tout changement fait dans une proportion, de manière que la ſomme de l'antécédent & du conſéquent, ou leur différence, ſoit comparée à l'antécédent ou au conſéquent, de la même manière dans chaque rapport, formera toujours une proportion, numéro 174.

La ſomme ou la différence des antécédens d'une proportion, eſt à la ſomme ou la différence des conſéquens, comme un antécédent eſt à ſon conſéquent, n. 175.

Dans une ſuite de pluſieurs rapports égaux, la ſomme des antécédens eſt à celle des conſéquens, comme un antécédent eſt à ſon conſéquent, n. 176.

Le rapport compoſé réſulte de deux ou pluſieurs rapports, dont on multiplie les antécédens entr'eux & les conſéquens entr'eux, n. 177.

Le rapport eſt doublé, triplé, quadruplé, &c. quand il eſt compoſé de deux, trois, quatre, &c. rapports égaux, n. 179.

Les produits de deux ou pluſieurs proportions multipliées par ordre, ou terme par terme, ſont en proportion, n. 180.

Les quarrés, les cubes, & en général les puiſſances ſemblables de quatre quantités en proportion, ſont auſſi en proportion, n. 181.

Les racines quarrées, cubiques, &c. de quatre quantités en proportion, ſont auſſi en proportion, n. 182.

La règle de trois a pour objet de trouver un terme d'une proportion, les trois autres étant donnés, n. 184.

Une règle de trois eſt ſimple quand ſon énoncé ne renferme que quatre termes, dont l'un eſt à trouver & les trois

autres ſont donnés, n. 184.
Une règle de trois eſt directe lorſque les quantités principales ſont directement proportionnelles à leurs relatives, n. 184.
Une règle de trois eſt inverſe quand les quantités principales ſont réciproquement proportionnelles à leurs relatives, n. 185.
Une règle de trois eſt compoſée, lorſque ſon énoncé renferme plus de trois termes connus; on la réduit à une proportion, dont les rapports ſont compoſés, n. 186.
La règle de ſociété a pour objet, de partager un nombre en pluſieurs parties qui aient des rapports donnés, n. 187.
La progreſſion arithmétique eſt une ſuite de termes qui ont même différence, n. 188.
Un terme quelconque d'une progreſſion arithmétique croiſſante, eſt compoſé du premier, plus autant de fois la raiſon ou la différence, qu'il y a de termes avant lui. n. 190.
Une progreſſion géométrique eſt une ſuite de termes, dont chacun contient également le ſuivant, ou y eſt également contenu, n. 195.
Un terme quelconque d'une progreſſion géométrique croiſſante, eſt compoſé du premier multiplié, autant de fois de ſuite, par la raiſon, qu'il y a de termes avant lui, n. 196.
Les logarithmes ſont des nombres en progreſſion arithmétique, qui répondent, terme pour terme, à une pareille ſuite de nombres en progreſſion géométrique, n. 200.
Dans la conſtruction des logarithmes dont on fait uſage actuellement, on a fait correſpondre la progreſſion arithmétique 0, 1, 2, 3, &c. à la progreſſion géométrique décuple, 1, 10, 100, 1000, &c. n. 202.
La caractériſtique du logarithme d'un nombre, marque dans quelle décade eſt compris ce nombre, n. 206.
La ſomme des logarithmes de deux nombres eſt égale au logarithme de leur produit, n. 210.
Le logarithme d'une puiſſance quelconque d'un nombre, eſt égal au logarithme de ce nombre, multiplié par le nombre qui marque cette puiſſance, n. 213.
Le logarithme de la racine d'un nombre, eſt égal au logarithme de ce nombre, diviſé par le degré de la racine, n. 214.
Le logarithme du quotient d'une diviſion eſt égal au logarithme du dividende, moins le logarithme du diviſeur, n. 215.
Le logarithme d'un nombre entier joint à une fraction, ſe trouve, en réduiſant cet entier en fraction, & retranchant le logarithme du dénominateur, de celui du nouveau numérateur, n. 218.
Le logarithme d'une fraction

eſt la différence des logarithmes du numérateur & du dénominateur, précédée d'un ſigne, qui avertit que cette différence eſt un nombre qui reſte encore à retrancher; en ſorte que les logarithmes doivent être employés, ſuivant des règles contraires à celles que l'on ſuit pour ceux des nombres entiers, pour la multiplication & la diviſion, n. 220 & 221.

Le complément arithmétique d'un nombre, eſt la différence entre ce nombre, & l'unité ſuivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans ce nombre, n. 231.

Par l'uſage des complémens arithmétiques, on change les ſouſtractions en additions, & on ramène les logarithmes des fractions aux mêmes règles que l'on ſuit pour ceux des nombres entiers, n. 231.

Fin de la Table des Principes de l'Arithmétique.

TABLE
DES PRINCIPES
DE LA GÉOMÉTRIE.

La ligne eſt l'étendue en longueur ſeulement, numéro 1.

La ſurface eſt l'étendue en longueur & largeur ſeulement, *Ibid.*

Le corps eſt l'étendue en longueur, largeur & profondeur, *Ibid.*

Le point n'a aucune étendue; ce n'eſt que le terme de l'étendue, n. 2.

La ligne droite eſt le plus court chemin d'un point à un autre, *Ibid.*

La ligne courbe eſt la trace d'un point, qui dans ſon mouvement ſe détourne infiniment peu à chaque pas, *Ibid.*

La ligne droite eſt la meſure des lignes, n. 4.

La ſurface plane eſt celle à laquelle on peut appliquer exactement une ligne droite dans tous les ſens, n. 5.

Le cercle eſt une ſurface plane, terminée par une ligne courbe qu'on nomme *circonférence*, dont tous les points ſont également éloignés d'un point de ce plan, appellé *centre*, n. 6.

Toute portion de la circonférence s'appelle *arc de cercle*, *Ibid.*

Le rayon eſt la diſtance du centre à la circonférence, *Ibid.*

Une corde ou ſoutendante, eſt une ligne droite, terminée de part & d'autre par la circonférence; c'eſt un diamètre lorſqu'elle paſſe par le centre, *Ibid.*

Les cordes égales du même cercle, ou de cercles égaux, ſoutendent des arcs égaux, & réciproquement, n. 7.

L'angle eſt l'ouverture de deux lignes qui ſe rencontrent en un point qu'on nomme *ſommet*, n. 9.

Un angle a pour meſure l'arc de cercle compris entre ſes côtés & décrit de ſon ſommet comme centre, n. 12.

Un angle droit a pour meſure le quart de la circonférence, n. 16.

L'angle obtus eſt plus grand que l'angle droit, & l'angle aigu eſt moindre que l'angle droit, *Ibid.*

Deux angles de ſuite valent enſemble deux angles droits, n. 17.

Tous les angles rectilignes qui ont leur ſommet au même point, & ſont tracés dans un même plan, valent enſemble quatre angles droits, n. 18.

Le ſupplément d'un angle eſt ſa différence à deux angles droits ; & le complément d'un angle eſt ſa différence à un droit, n. 19 & 21.

Les ſupplémens ou complémens du même angle, ou d'angles égaux, ſont égaux, *Ibid.*

Les angles oppoſés au ſommet ſont égaux, n. 20.

Une ligne eſt perpendiculaire à une autre quand elle la rencontre ſans pencher plus d'un côté que de l'autre, & quand elle penche de l'un ou de l'autre côté, elle eſt oblique, n. 23 & 28.

D'un même point, pris dans une ligne ou hors d'une ligne, on ne peut mener dans le même plan qu'une ſeule perpendiculaire à cette ligne, n. 25 & 26.

De toutes les droites menées d'un même point ſur une ligne, la perpendiculaire eſt la plus courte ; les obliques qui s'éloignent le plus de la perpendiculaire, ſont les plus longues ; les obliques également éloignées de la perpendiculaire ſont égales, & réciproquement, n. 27.

Tout point d'une perpendiculaire élevée ſur le milieu d'une ligne, eſt également éloigné des extrémités de cette ligne, & tout point hors de cette ligne perpendiculaire n'eſt pas également éloigné de ces mêmes extrémités, n. 29 & 30.

Deux lignes droites ſont parallèles lorſqu'elles ſont par-tout également éloignées l'une de l'autre, n. 36.

Deux droites parallèles, étant coupées par une ſécante, les angles internes-externes du même côté ſont égaux ; les angles alternes-internes ou externes ſont égaux ; les angles internes du même côté, pris enſemble, valent deux droits, ainſi que les externes du même côté, & réciproquement, n. 37 & ſuiv.

Deux angles tournés d'un même côté, & qui ont leurs côtés parallèles, ſont égaux, n. 43.

Une ligne droite ne peut rencontrer la circonférence en plus de deux points, n. 47.

Dans un même demi-cercle les plus grandes cordes ſoutendent les plus grands arcs, & réciproquement, *Ibid.*

Une ſécante eſt une ligne qui eſt en partie au dehors & en partie au dedans du cercle. Une tangente eſt une ligne appliquée contre la circonférence, *Ibid.*

Une tangente ne peut rencontrer la circonférence qu'en un ſeul point, n. 48.

Le rayon mené du centre au point d'attouchement, eſt perpendiculaire à la tangente, & réciproquement, *Ibid.*

Le point d'attouchement de

deux circonférences eſt dans la droite qui joint leurs centres, n. 50.

Le centre d'un cercle, le milieu d'une corde & le milieu de ſon arc, ſont dans une même droite perpendiculaire à cette corde ; enſorte qu'une droite perpendiculaire à la corde qui paſſe par un de ces points, paſſe auſſi par les deux autres, & réciproquement, n. 52 & ſuiv.

Deux cordes parallèles interceptent entr'elles des arcs égaux, n. 60.

Un angle qui a ſon ſommet à la circonférence, & qui eſt formé par deux cordes ou par une tangente & une corde, a pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés, n. 63.

Les angles à la circonférence, qui comprennent entre leurs côtés des arcs égaux ou le même arc, ſont égaux entr'eux, n. 64.

Un angle à la circonférence eſt droit quand ſes côtés paſſent par les extrémités du diamètre, n. 65.

Un angle à la circonférence, formé par une corde & le prolongement d'une autre, a pour meſure la moitié des deux arcs ſoutendus par ces cordes, n. 69.

Un angle qui a ſon ſommet entre le centre & la circonférence, a pour meſure la moitié des deux arcs compris entre ſes côtés & leurs prolongemens, n. 70.

Un angle qui a ſon ſommet hors du cercle, a pour meſure la moitié de la différence des deux arcs compris entre ſes côtés, n. 71.

Un triangle rectiligne eſt un eſpace renfermé par trois lignes droites, n. 73.

Dans tout triangle, la ſomme de deux côtés eſt plus grande que le troiſième, *Ibid.*

Un triangle eſt équilatéral quand ſes trois côtés ſont égaux, iſoſcèle quand deux ſeulement ſont égaux, ſcalène quand les trois côtés ſont inégaux, *Ibid.*

Un triangle qui a un angle droit eſt nommé *rectangle* ; celui qui a un angle obtus, *obtus-angle* ; & celui qui a ſes trois angles aigus, *acutangle*, n. 75.

La ſomme des trois angles de tout triangle rectiligne, vaut deux angles droits, n. 74.

L'angle extérieur d'un triangle vaut la ſomme des deux angles intérieurs oppoſés, n. 75.

Dans tout triangle, les angles oppoſés aux côtés égaux, ſont égaux, & réciproquement, n. 77.

Dans un même triangle, le plus grand côté eſt oppoſé au plus grand angle, & le plus petit côté au plus petit angle, & réciproquement, n. 78.

Deux triangles ſont parfaitement égaux ; 1°. quand ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, n. 80.

2°. Quand ils ont un côté égal adjacent à deux angles

égaux chacun à chacun, n. 81.

3°. Lorſqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun, n. 83.

Si deux parallèles ſont interceptées entre deux autres parallèles, elles ſont égales, & réciproquement, n. 82.

Un polygone eſt une figure de pluſieurs côtés, n. 84.

On appelle *diagonale* toute ligne menée, dans un polygone, d'un angle à un autre, n. 85.

La ſomme de tous les angles d'un polygone quelconque eſt égale à deux fois autant d'angles droits qu'il y a de côtés moins deux, & les angles extérieurs valent quatre angles droits, n. 86 & 87.

Un polygone eſt régulier lorſque tous ſes côtés & ſes angles ſont égaux, n. 88.

On peut faire paſſer une circonférence de cercle par tous les angles d'un polygone régulier, n. 89.

Le côté de l'hexagone régulier eſt égal au rayon du cercle circonſcrit, n. 92.

L'apothême d'un polygone régulier eſt une perpendiculaire menée du centre ſur l'un des côtés; tous les apothêmes d'un polygone régulier ſont égaux, n. 91.

Dans toute proportion géométrique, la ſomme des antécédens eſt à la ſomme des conſéquens, comme la différence des antécédens eſt à la différence des conſéquens, n. 96.

La ſomme des deux premiers termes d'une proportion, eſt à la ſomme des deux derniers, comme la différence des deux premiers eſt à la différence des deux derniers, n. 98.

Une droite menée dans un triangle parallèlement à l'un des côtés, coupe les deux autres côtés en parties proportionnelles, & réciproquement, n. 102.

Si d'un même point on mène pluſieurs droites qui rencontrent deux parallèles, ces droites ſeront coupées proportionnellement par les parallèles, n. 103.

Une droite qui diviſe un angle d'un triangle, en deux également, coupe le côté oppoſé en deux parties proportionnelles aux côtés adjacens, n. 104.

Deux triangles ſont ſemblables; 1°. quand ils ont leurs angles égaux chacun à chacun, n. 109.

Et par conſéquent, lorſque deux angles de l'un ſont égaux chacun à chacun à deux angles de l'autre n. 110.

Quand les côtés de l'un ſont parallèles ou perpendiculaires aux côtés de l'autre, n. 111.

2°. Lorſqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, n. 113.

3°. Quand les trois côtés de l'un ſont proportionnels aux trois côtés de l'autre, n. 114.

La perpendiculaire abaiſſée de l'angle droit d'un triangle rectangle, ſur l'hypothénuſe, le partage en deux triangles qui lui ſont ſemblables, & par conſéquent ſemblables entr'eux, n. 112.

La perpendiculaire menée de l'angle droit ſur l'hypothénuſe, eſt moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hypothénuſe, *Ibid.*

Chaque côté de l'angle droit, eſt moyen proportionnel entre l'hypothénuſe & le ſegment correſpondant, *Ibid.*

Si par un même point on mène pluſieurs droites qui rencontrent deux parallèles, les parties de l'une de ces parallèles ſeront proportionnelles aux parties correſpondantes de l'autre, n. 115.

Deux cordes qui ſe coupent dans un cercle, ont leurs parties réciproquement proportionnelles, n. 120.

Une perpendiculaire abaiſſée d'un point de la circonférence ſur un diamètre, eſt moyenne proportionnelle entre les parties de ce diamètre, n. 121.

Deux ſécantes menées d'un même point pris hors du cercle, ſont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures, n. 123.

Si d'un même point pris hors du cercle, on mène une tangente & une ſécante, la tangente eſt moyenne proportionnelle entre la ſécante, entière & ſa partie extérieure, n. 124.

Une droite eſt coupée en moyenne & extrême raiſon, lorſqu'elle eſt coupée en deux parties, dont l'une eſt moyenne proportionnelle entre la ligne entière & l'autre partie, n. 125.

Si de deux angles correſpondans de deux polygones ſemblables, on mène des diagonales aux autres angles, les deux polygones ſeront partagés en un même nombre de triangles ſemblables chacun à chacun, & réciproquement, n. 127, 128.

Les contours des figures ſemblables ſont entr'eux comme leurs côtés homologues, n. 129.

Les cercles étant des figures ſemblables, leurs circonférences ſont entr'elles comme leurs rayons, ou comme leurs diamètres, n. 131.

Un parallélogramme eſt un quadrilatère, dont les côtés oppoſés ſont parallèles, n. 133.

On l'appelle *rhomboïde* quand ſes côtés contigus ne ſont pas égaux entr'eux, & qu'aucun de ſes angles n'eſt droit, *Ibid.*

Rhombe, quand les quatre côtés ſont égaux entr'eux, & qu'il n'a point d'angles droits, *Ibid.*

Rectangle, quand les angles ſont droits & les côtés contigus inégaux, *Ibid.*

Quarré, quand tous les côtés ſont égaux & les angles droits, *Ibid.*

Le trapèze eſt un quadrilatère qui

qui n'a que deux côtés opposés parallèles, *Ibid.*

Un triangle rectiligne est la moitié d'un parallélogramme de même base & de même hauteur, n. 134.

Les parallélogrammes de même base & de même hauteur sont égaux en surface, n. 135.

Il en est de même des triangles, n. 136.

La surface d'un parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur, n. 139.

La surface d'un triangle est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur, n. 141.

La surface d'un trapèze est égale au produit de sa hauteur, par une ligne menée parallélement aux deux bases & à distance égale de ces bases, n. 142.

La surface d'un polygone régulier est égale à la moitié du produit de son contour, par l'apothême, n. 144.

La surface d'un cercle est égale à sa circonférence multipliée par la moitié du rayon, n. 145.

Un secteur circulaire est une portion de cercle terminée par un arc & deux rayons; & l'on nomme *segment circulaire* une surface terminée par un arc & sa corde, n. 147.

On appelle *toisé des surfaces* la manière de trouver la valeur d'une surface, dont les dimensions sont évaluées en toises & parties de la toise, n. 151.

On trouve à la table les différentes subdivisions de la toise quarrée; pag. 270.

Les surfaces des parallélogrammes & des triangles, sont entr'elles comme les produits de leurs bases & de leurs hauteurs, n. 156 & 158.

Les parallélogrammes de même base sont entr'eux comme leurs hauteurs, & ceux qui ont même hauteur sont entr'eux comme leurs bases, *Ibid.*

Il en est de même des triangles, *Ibid.*

Le quarré du rayon est à la surface du cercle, comme le diamètre est à la circonférence, n. 157.

Les surfaces des parallélogrammes ou des triangles semblables, sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues, n. 159 & 160.

Cette propriété s'étend à toutes les figures semblables, n. 161.

Les cercles étant des figures semblables, leurs surfaces sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres, n. 162.

Dans tout triangle rectangle, le quarré de l'hypothénuse est égal à la somme des quarrés construits sur les deux autres côtés, n. 164.

Le quarré de l'hypothénuse est à chacun des quarrés des autres côtés, comme l'hypothénuse est à chacun de ses segmens correspondans à ces côtés, n. 171.

Si de différens points de la circonférence d'un cercle,

on mène des cordes à l'extrémité d'un diamètre, & des perpendiculaires à ce diamètre ; les quarrés des cordes ſeront proportionnels aux parties du même diamètre, compriſes entre les perpendiculaires correſpondantes, & l'extrémité du diamètre où ces cordes aboutiſſent, n. 173.

Une ligne droite ne peut être en partie dans un plan, & en partie élevée ou abaiſſée à ſon égard, n. 175.

Deux droites qui ſe coupent ſont dans un même plan, n. 177.

La rencontre ou l'interſection de deux plans eſt une ligne droite, n. 178.

Par une même ligne droite on peut faire paſſer une infinité de plans différens, *Ibid.*

Une ligne eſt perpendiculaire à un plan quand elle ne penche d'aucun côté de ce plan, n. 179.

Une ligne eſt perpendiculaire à un plan, lorſqu'elle eſt perpendiculaire à deux lignes menées par ſon pied dans ce plan, n. 180.

Si d'un point pris hors d'un plan on abaiſſe une perpendiculaire & une oblique à ce plan, que l'on joigne leurs pieds par une droite, & que par le pied de l'oblique on mène dans le même plan, une perpendiculaire à cette droite ; elle ſera auſſi perpendiculaire à l'oblique, n. 183.

Un plan eſt perpendiculaire à un autre plan, quand il paſſe par une droite perpendiculaire à ce dernier, n. 186.

Si deux plans ſont perpendiculaires l'un à l'autre, & que d'un point pris dans un de ces plans on mène une perpendiculaire à leur commune ſection, elle ſera perpendiculaire à l'autre plan, & réciproquement, n. 187 & 188.

Deux perpendiculaires à un même plan ſont parallèles, n. 188.

Deux droites parallèles à une troiſième ſont parallèles entr'elles, n. 189.

La commune ſection de deux plans perpendiculaires à un troiſième, eſt perpendiculaire à ce dernier, n. 190.

Un angle plan eſt l'ouverture de deux plans qui ſe rencontrent, n. 191.

La meſure d'un angle-plan eſt la même que celle de l'angle rectiligne formé par deux droites menées dans ces plans perpendiculairement au même point de leur ſection commune, n. 192.

Deux plans ſont parallèles quand ils ſont par-tout également éloignés l'un de l'autre, n. 196.

Si deux plans parallèles ſont coupés par un troiſième, leurs ſections ſont parallèles, n. 197.

Les angles-plans, formés par des plans qui ſe rencontrent ou qui ſe coupent, ont les mêmes propriétés que les angles-rectilignes, n. 193 & 198.

Si d'un point pris hors d'un plan, on mène pluſieurs lignes à ce plan, elles ſeront coupées proportionnellement par un plan parallèle au premier, & formeront dans ces plans des figures ſemblables en joignant leurs points de rencontre par des droites, n. 199.

Ces figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs diſtances au point de concours des lignes qui rencontrent les plans, n. 202.

Si du même point de concours on mène à ces plans d'autres droites, qui y formeront pareillement des figures ſemblables; ces figures ſeront proportionnelles aux premières, n. 201.

Un priſme eſt un ſolide engendré par un plan qui ſe meut parallèlement à lui-même le long d'une droite, n. 204.

Un priſme eſt droit ou oblique ſuivant que ſes arêtes ſont perpendiculaires ou obliques au plan générateur, *Ibid.*

Un parallélipipède eſt un priſme, dont la baſe eſt un parallélogramme; on le nomme *parallélipipède rectangle* lorſqu'il eſt droit, & que ſa baſe eſt un rectangle, *Ibid.*

Le cube eſt un parallélipipède rectangle, dont la baſe eſt un quarré, & la hauteur égale au côté de ce quarré, *Ibid.*

Le cylindre eſt un priſme, dont la baſe eſt un cercle, & l'on nomme *axe du cylindre* la droite qui joint les centres des deux baſes oppoſées, n. 205.

La pyramide eſt un ſolide terminé par un polygone qui lui ſert de baſe, & par autant de faces triangulaires, qu'il y a de côtés dans cette baſe, leſquelles ſe réuniſſent en un même point qu'on appelle le *ſommet de la pyramide*, n. 206.

Une pyramide eſt régulière lorſque le polygone qui lui ſert de baſe eſt régulier, & qu'en même temps la perpendiculaire abaiſſée du ſommet paſſe par le centre de ce polygone, *Ibid.*

Le cône eſt une pyramide, dont la baſe eſt un cercle; il eſt droit ou oblique, ſuivant que la droite menée du ſommet au centre de la baſe eſt perpendiculaire ou oblique à cette baſe, n. 207.

La ſphère eſt un ſolide engendré par la révolution d'un demi-cercle autour de ſon diamètre, n. 208.

On appelle *grand cercle de la ſphère* celui qui a même diamètre que la ſphère, *Ibid.*

Le ſecteur ſphérique eſt un ſolide engendré par la révolution d'un ſecteur circulaire autour du rayon; & l'on nomme *calotte ſphérique* la ſurface engendrée dans cette révolution, par l'arc du ſecteur circulaire, *Ibid.*

Le ſegment ſphérique eſt un ſolide formé par la révolution d'un demi-ſegment circulaire autour de ſa flèche, *Ibid.*

On appelle *ſolides ſemblables* ceux qui ſont terminés par un même nombre de faces ſemblables chacune à chacune, & ſemblablement diſpoſées, n. 209.

Les arêtes & les ſommets des angles ſolides correſpondans, ſont des lignes, & des points, ſemblablement diſpoſés dans deux ſolides ſemblables, n. 210.

Les triangles, dont les côtés joignent, dans deux ſolides ſemblables, les ſommets de deux angles ſolides correſpondans, ſont ſemblables, & ſemblablement diſpoſés, n. 211.

Les diagonales qui joignent les ſommets d'angles ſolides correſpondans de deux ſolides ſemblables, ſont entr'elles comme les arêtes homologues, 212.

Les perpendiculaires abaiſſées des ſommets de deux angles ſolides correſpondans dans deux ſolides ſemblables, ſont proportionnelles aux arêtes homologues, n. 214.

La ſurface d'un priſme, ſans y comprendre ſes deux baſes, eſt égale au produit de la directrice, multipliée par le contour d'une ſection, à laquelle cette directrice eſt perpendiculaire, n. 216.

Si le priſme eſt droit, la ſurface, ſans y comprendre les deux baſes, eſt égale au contour de ſa baſe, multiplié par ſa hauteur, n. 117.

La ſurface d'un cylindre droit, non compris les deux baſes, eſt égale au produit de ſa hauteur par la circonférence de ſa baſe, n. 218.

La ſurface d'une pyramide régulière eſt égale au contour de ſa baſe multiplié par la moitié de l'apotheme de la pyramide, n. 219.

La ſurface d'un cône droit eſt égale au produit de la circonférence de ſa baſe, par la moitié du côté de ce cône, n. 220.

La ſurface d'un cône droit tronqué, à baſes parallèles, eſt égale au produit du côté de ce tronc, par la circonférence de la ſection faite à égales diſtances des baſes oppoſées, n. 222.

La ſurface d'une ſphère eſt égale au produit de la circonférence d'un de ſes grands cercles, multipliée par le diamètre, n. 223.

Elle eſt égale à la ſurface convexe du cylindre circonſcrit, n. 224.

Elle eſt auſſi quadruple de celle de ſon grand cercle, n. 225.

La ſurface d'une calotte ſphérique eſt égale au produit de ſa flèche, par la circonférence de l'un des grands cercles de la ſphère, 226.

Les ſurfaces des priſmes droits, (ſans y comprendre celles des baſes), ſont entr'elles

comme les produits de leurs hauteurs, par les contours de leurs baſes, n. 228.

Les ſurfaces des priſmes droits de même hauteur, ſont entr'elles comme les contours de leurs baſes ; elles ſont comme les hauteurs, ſi les contours ſont égaux, n. 229.

Les ſurfaces des cônes droits ſont entr'elles comme les produits de leurs côtés, par les circonférences des baſes, ou par les rayons, ou par les diamètres de ces baſes, n. 230.

Les ſurfaces des ſolides ſemblables, ſont entr'elles comme les quarrés de leurs lignes homologues, n. 231.

Les ſurfaces de deux ſphères ſont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres, n. 232.

Deux priſmes de même baſe & de même hauteur, ſont égaux en ſolidité, n. 234.

La ſolidité d'un priſme quelconque eſt égale au produit de ſa baſe, par ſa hauteur, n. 236.

La ſolidité d'une pyramide ou d'un cône, eſt égale au tiers du produit de ſa baſe, par ſa hauteur, n. 242.

La ſolidité de la ſphère eſt égale aux deux tiers du cylindre circonſcrit, n. 245.

La ſolidité d'un ſecteur ſphérique eſt égale au produit de la ſurface de la calotte, par le tiers du rayon, n. 247.

La ſolidité d'un ſegment ſphérique eſt égale à celle d'un cylindre, qui a pour rayon la flèche, & pour hauteur le rayon moins le tiers de la flèche, n. 248.

On appelle *priſme tronqué* le ſolide qui reſte lorſqu'on a ſéparé une partie d'un priſme par un plan incliné à la baſe, n. 250.

Si des trois angles de l'une des baſes d'un priſme triangulaire tronqué, on abaiſſe des perpendiculaires ſur l'autre baſe, ſa ſolidité eſt égale au produit de cette dernière baſe, multipliée par le tiers de la ſomme des trois perpendiculaires, n. 252.

On appelle *toiſé des ſolides* la manière de trouver la valeur d'un ſolide dont les dimenſions ſont évaluées en toiſes & parties de la toiſe, n. 259.

Les différentes ſubdiviſions de la toiſe-cube ſont rapportées dans la table, pag. 271.

La meſure en uſage pour les bois, s'appelle *ſolive* ; on en trouve les ſubdiviſions dans la table, n. 264.

Les priſmes ſont entr'eux comme les produits de leurs baſes & de leurs hauteurs, n. 268.

Les priſmes de même hauteur ſont entr'eux comme leurs baſes, & ceux qui ont même baſe ſont entr'eux commes leurs hauteurs, *Ibid.*

Les ſolidités de deux corps ſemblables, ſont entr'elles

comme les cubes de leurs lignes homologues, n. 270.
Les ſolidités de deux ſphères ſont entr'elles comme les cubes de leurs rayons ou de leurs diamètres, *Ibid.*
La trigonométrie plane enſeigne à déterminer trois des ſix parties d'un triangle rectiligne, par la connoiſſance des trois autres parties, parmi leſquelles il doit ſe trouver au moins un côté, n. 271.
Quand on connoît deux côtés d'un triangle, & l'angle oppoſé à l'un de ces côtés, on ne peut déterminer l'angle oppoſé à l'autre, qu'autant que l'on ſçait ſi ce dernier angle eſt aigu ou obtus, *Ibid.*
Le ſinus droit, ou ſimplement le ſinus d'un arc ou d'un angle, eſt la moitié de la corde d'un arc double de celui qui meſure cet angle, n. 274.
Le coſinus d'un arc ou d'un angle, eſt le ſinus du complément de cet arc ou de cet angle, *Ibid.*
Le ſinus-verſe d'un arc eſt la différence entre le rayon & le coſinus de cet arc, *Ibid.*
Le ſinus & le coſinus d'un angle ſont les mêmes que le ſinus & le coſinus de ſon ſupplément, n. 279.
Le ſinus de 90d eſt égal au rayon; on le nomme auſſi *ſinus total*, n. 278.
Le ſinus de 30d eſt égal à la moitié du ſinus total, & la tangente de 45d eſt égale au rayon, n. 275 & 276.
La tangente & la ſécante d'un angle, ſont les mêmes que la tangente & la ſécante de ſon ſupplément, n. 280.
Le coſinus d'un arc eſt égal à la racine quarrée de la différence du quarré de ſon ſinus au quarré du rayon, n. 283.
Le ſinus de la moitié d'un arc eſt égal à la moitié de la racine quarrée du quarré du ſinus de l'arc entier, joint au quarré de ſon ſinus-verſe, n. 284.
Le ſinus d'un arc double eſt égal à deux fois le ſinus de l'arc ſimple, multiplié par ſon coſinus, & diviſé par le rayon, n. 285.
Le ſinus de la ſomme ou de la différence de deux arcs, eſt égal à la ſomme ou à la différence des produits du ſinus de l'un, multiplié par le coſinus de l'autre, diviſée par le rayon, n. 286.
Le coſinus de la ſomme ou de la différence de deux arcs eſt égal à la différence ou à la ſomme des produits des deux ſinus & des deux coſinus de ces arcs, diviſée par le rayon, n. 287.
La ſomme des ſinus de deux arcs, eſt à la différence de ces mêmes ſinus, comme la tangente de la moitié de la ſomme de ces deux arcs eſt à la tangente de la moitié de leur différence, n. 289.

Dans tout triangle rectangle ; 1°. Le rayon ou ſinus total, eſt au ſinus d'un des angles aigus, comme l'hypothénuſe eſt au côté oppoſé à cet angle aigu, n. 299.

2°. Le rayon eſt à la tangente d'un des angles aigus, comme le côté adjacent à cet angle eſt au côté qui lui eſt oppoſé, n. 300.

Dans tout triangle rectiligne, les ſinus des angles ſont proportionnels aux côtés qui leur ſont oppoſés, n. 303.

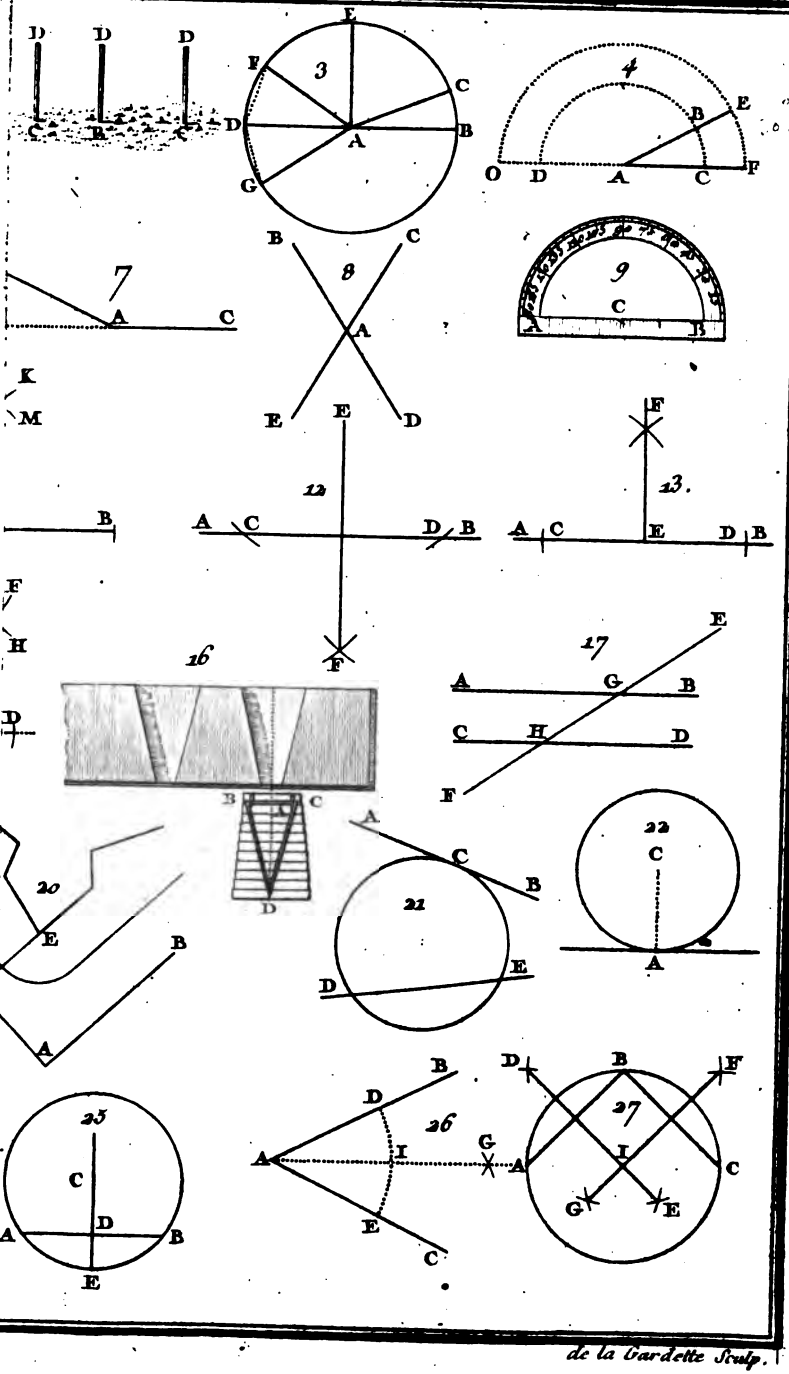
La plus grande de deux quantités eſt égale à la moitié de leur ſomme, plus la moitié de leur différence ; & la plus petite eſt égale à la moitié de leur ſomme, moins la moitié de leur différence, n. 305.

Dans tout triangle rectiligne, ſi d'un angle on abaiſſe une perpendiculaire ſur le côté oppoſé, ce côté ſera à la ſomme des deux autres, comme leur différence eſt à la différence ou à la ſomme des ſegmens, formés par la perpendiculaire, n. 306.

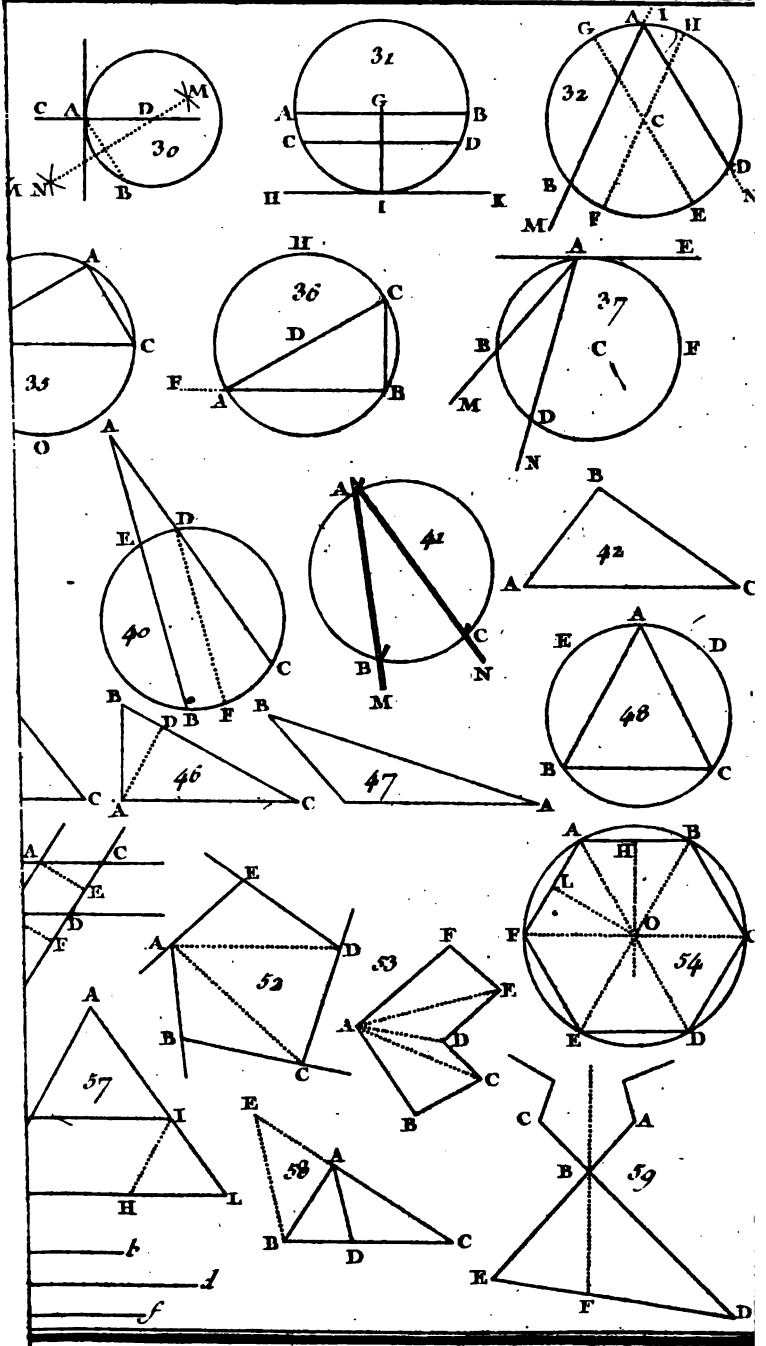
Dans tout triangle rectiligne, la ſomme de deux côtés eſt à leur différence, comme la tangente de la moitié de la ſomme des deux angles oppoſés à ces côtés, eſt à la tangente de la moitié de la différence de ces mêmes angles, n. 309.

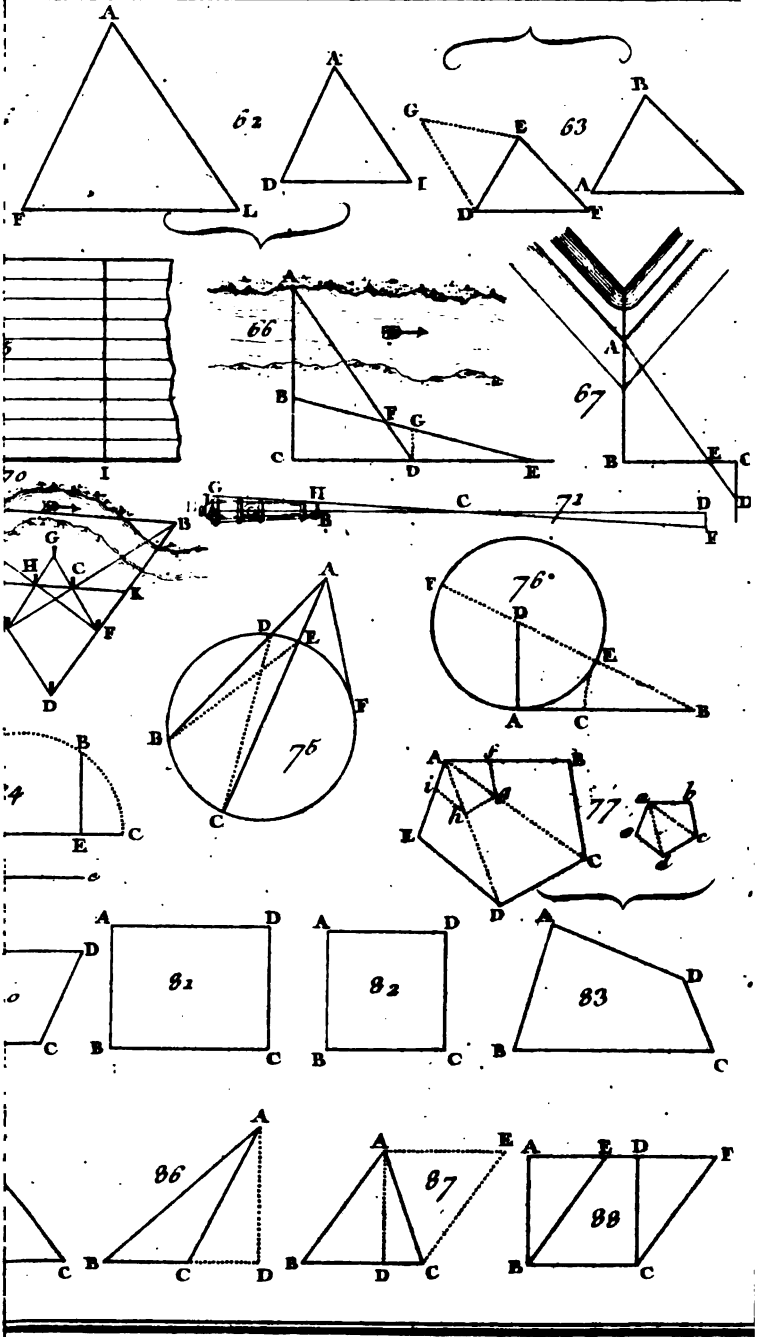
Fin de la Table des Principes de la Géométrie.

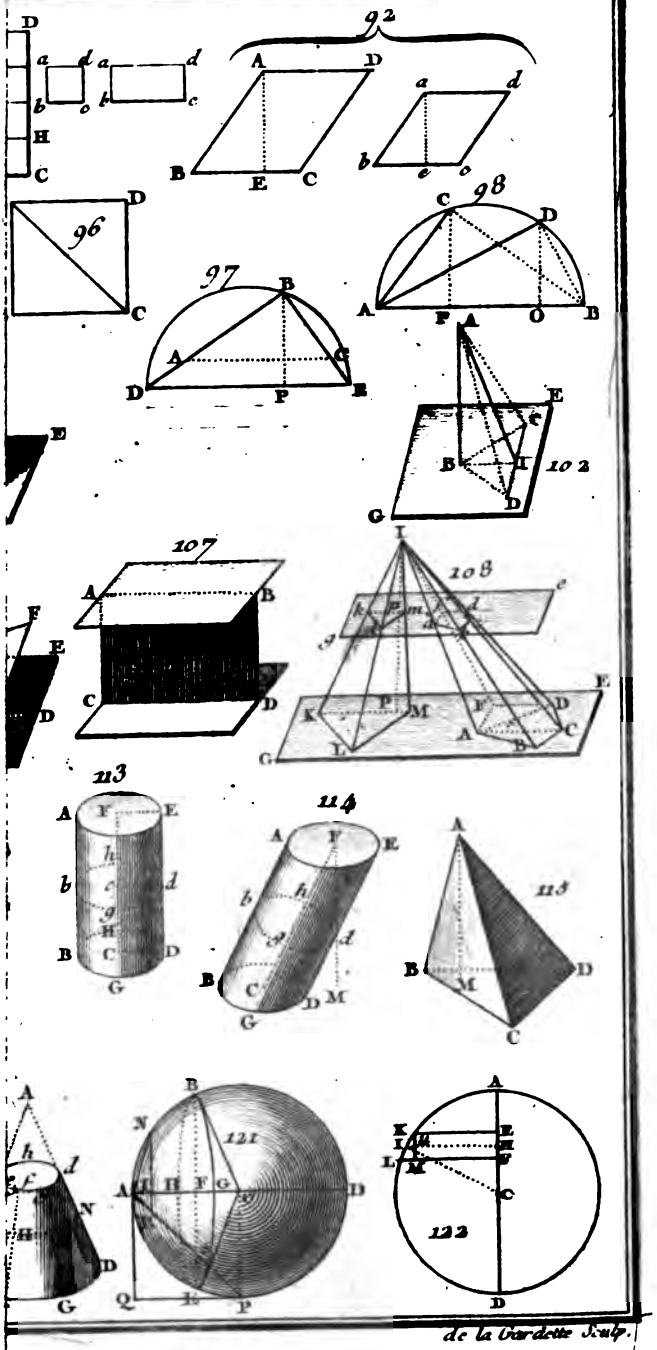
PRINTED IN FRANCE



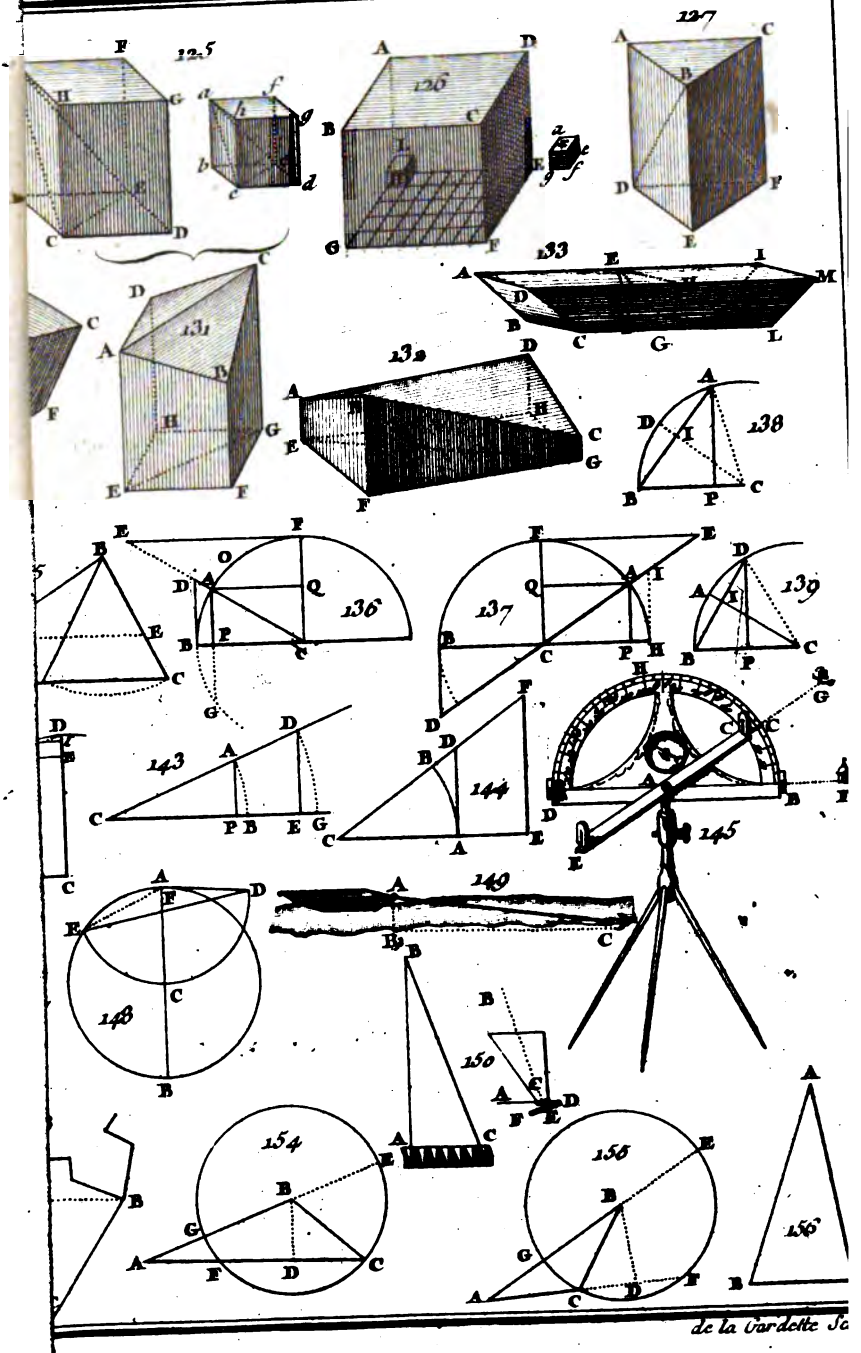
de la Gardette Sculp.

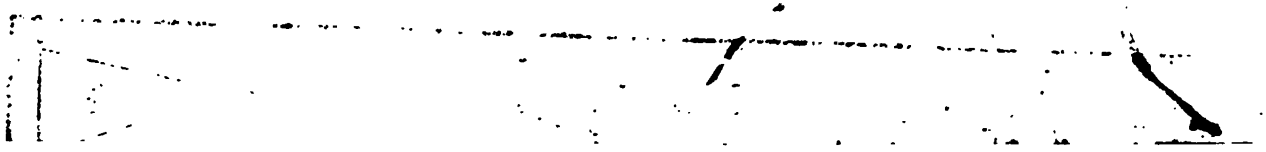

30
31
32
33
36
37
40
41
42
46
47
48
52
53
54
57
58
59
a
b
c
d
e
f

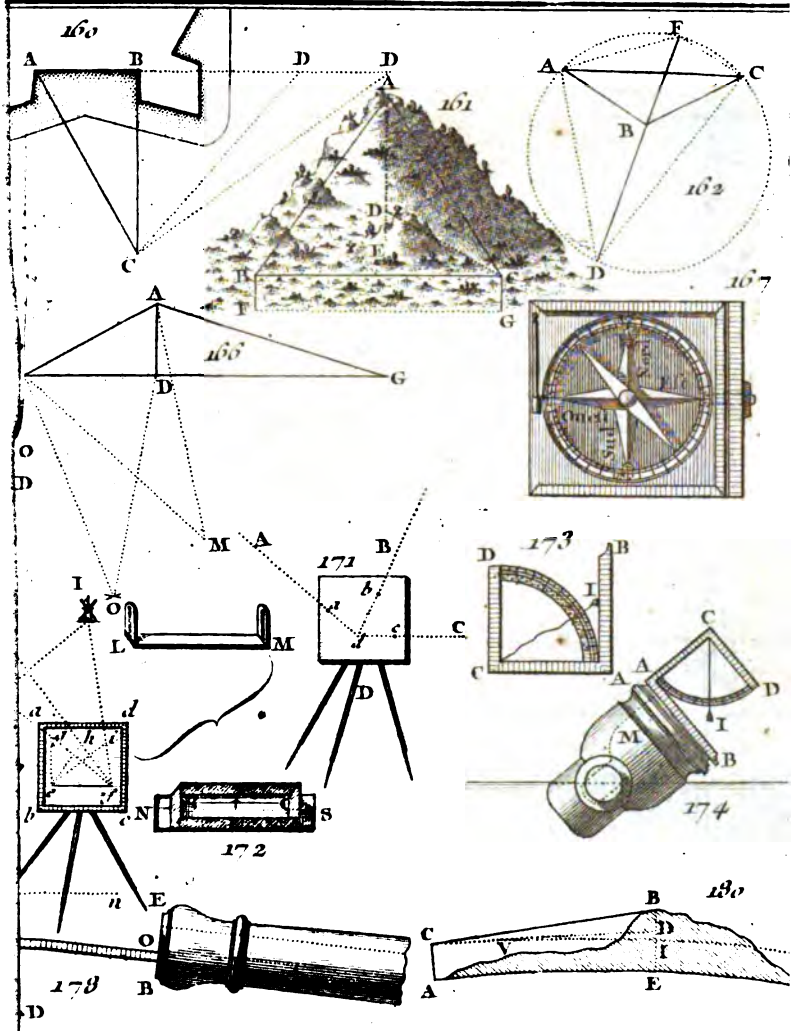

62
63
66
67
70
71
76
77
81
82
83
86
87
88



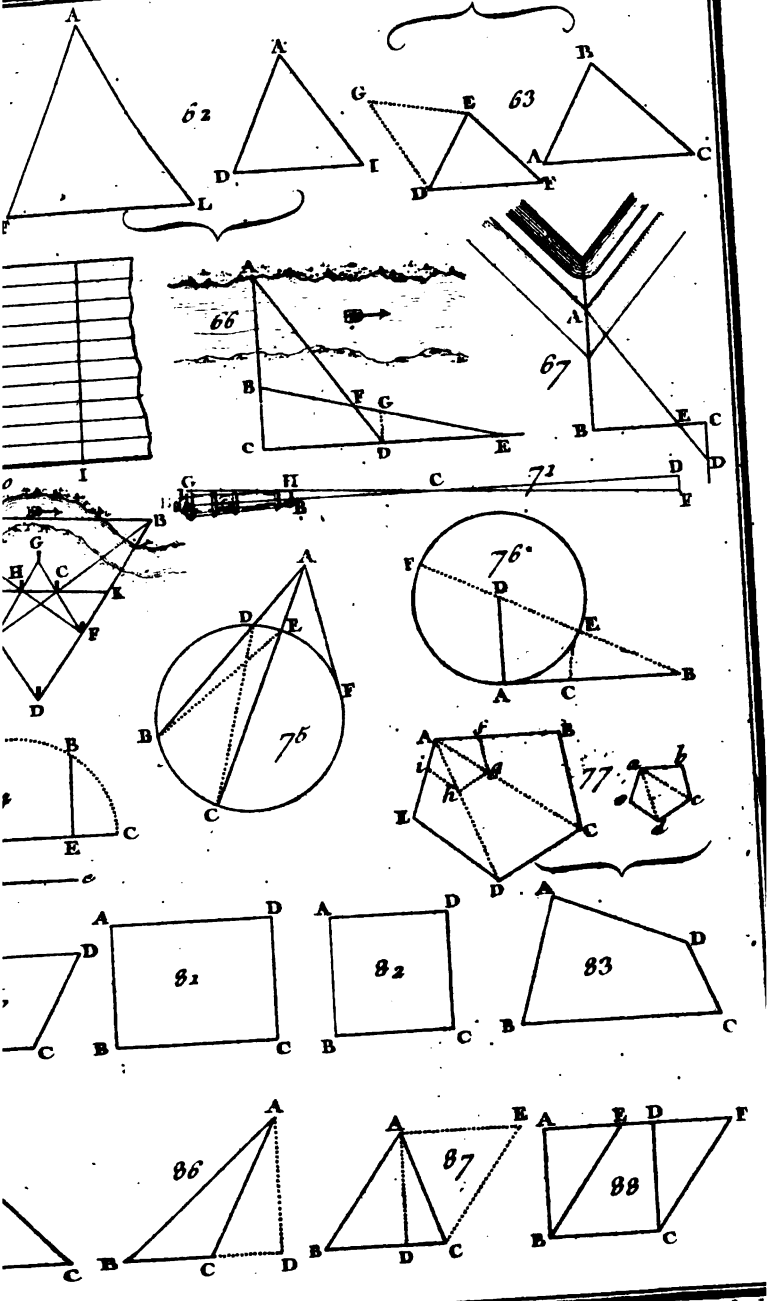
de la Gardette Sculp.

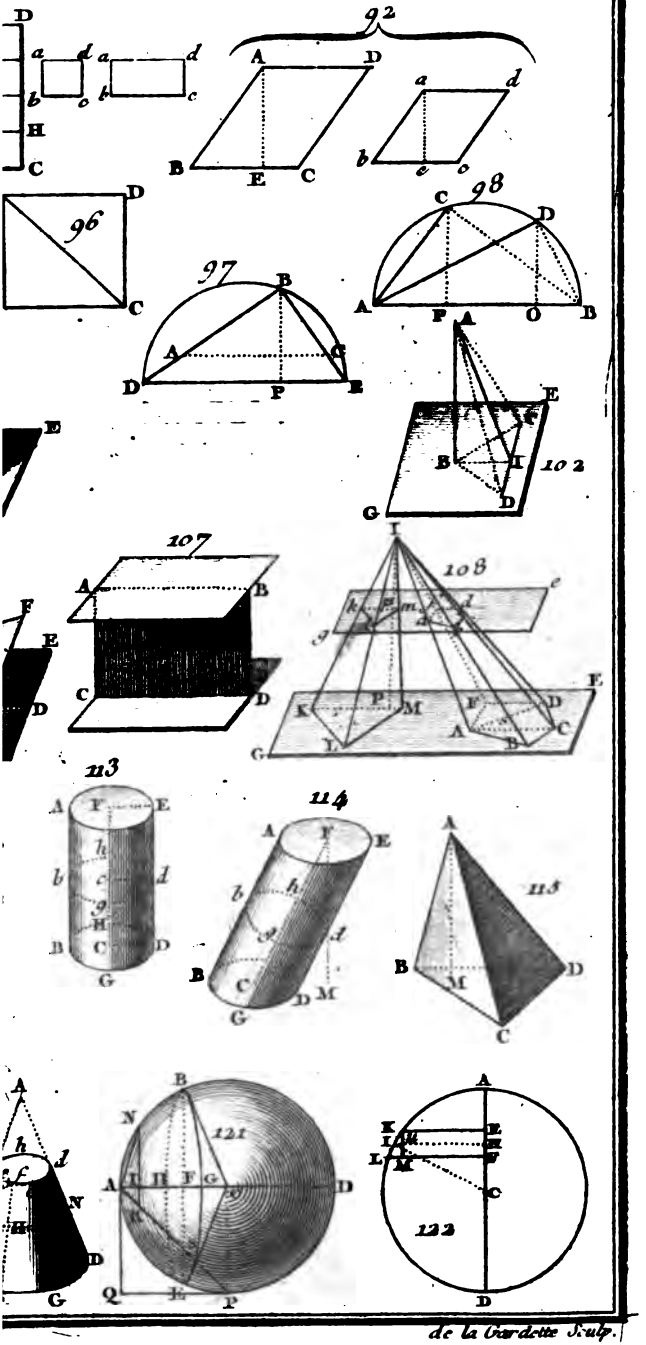

125
126
127
131
133
138
136
137
139
143
144
145
148
149
150
154
156

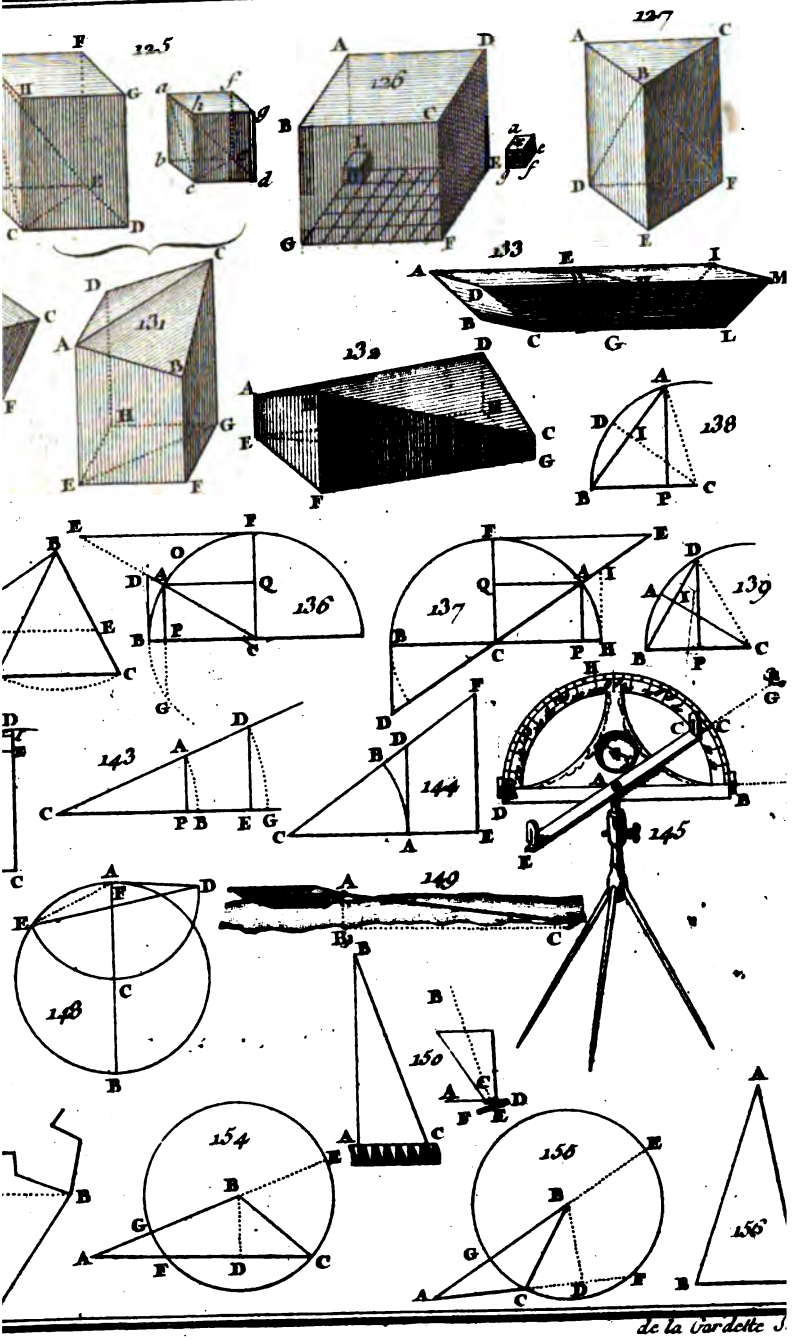



160
161
162
167
166
171
173
174
172
178
180
183
Nord
Ouest
Sud
Est

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06524 6426
A 546723


62
63
66
67
71
75
76
77
81
82
83
86
87
88


92
96
97
98
102
107
108
113
114
115
121
122
de la Gardette Sculp.


125
126
127
128
129
130
131
132
133
136
137
138
139
143
144
145
148
149
150
154
156